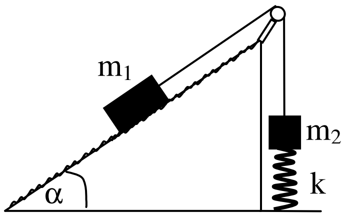
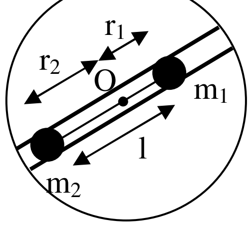
FISICA GENERALE T-A 27 aprile 2012
Prof. roberto Spighi (CdL ingegneria Energetica)

1) Un punto materiale di massa m è sottoposto alla forza $\vec{F}(t) = -\alpha x\hat{i} + \beta\hat{j} - \gamma\hat{k}$ con α, β e γ costanti positive. All'istante $t = 0$ il punto si trova in $\vec{r}(t=0) = x_o\hat{i} + z_o\hat{k}$ con velocità $\vec{v}(t=0) = v_o\hat{j}$. Determinare:
a) le dimensioni fisiche di α, β e γ ;
b) l'equazione del moto delle tre coordinate x, y e z ;
c) il raggio di curvatura ρ della traiettoria nell'istante $t = 0$.
Dati del problema: $\alpha = 1, \beta = 2$ e $\gamma = 3$ nelle loro unità di misura, m= ultimo numero di matricola + 1" Kg, $v_o = 2\, m/s$, $x_o = 1m$ e $z_o = 3m$.

2) Due corpi di massa m_1 = 1 kg ed m_2 = 2 kg sono collegati tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile ed una carrucola anch'essa di massa trascurabile. Il corpo di massa m_1 è appoggiato su di un piano scabro con coefficiente di attrito statico $\mu_S = 0.3$ inclinato di un angolo α=30°, mentre il corpo m_2 è appeso al filo e comprime una molla di massa trascurabile, costante elastica k=100 N/m, fissata alla piano orizzontale (vedi figura). Sapendo che il sistema è in equilibrio stabile, determinare:
a) la tensione del filo;
b) la compressione della molla;
c) la reazione del piano orizzontale nel punto dove poggia la molla.

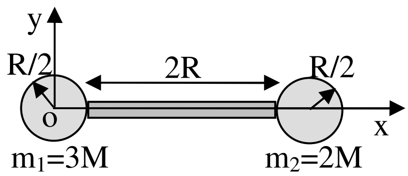


3) Su un piano orizzontale è posta una piattaforma circolare in rotazione antioraria attorno all'asse verticale; sulla piattaforma è presente una guida all'interno della quale sono posti due corpi di massa m_1 ed m_2 collegati da una corda inestensibile, di massa trascurabile e lunghezza l (vedi figura). Determinare la posizione di equilibrio r_1 ed r_2 dei 2 corpi rispetto al centro della piattaforma nel caso in cui:
a) il modulo della velocità angolare sia costante $|\vec{\omega}| = \omega_0$;
b) il modulo della velocità angolare dipenda dal tempo $|\vec{\omega}| = \alpha t$.



4) Dato il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = \alpha(\beta e^{\beta x} yz\,\hat{i} + e^{\beta x} z\,\hat{j} + e^{\beta x} y\,\hat{k})$ determinare:
a) le dimensioni fisiche delle costanti α e β;
b) se il campo è conservativo e nel caso calcolare l'energia potenziale in un punto P(x,y,z);
c) il lavoro compiuto dalla forza quando sposta il punto di applicazione da R(0,0,0) a S(1,1,1).

5) L'ultimo capolavoro del grande artista contemporaneo Oreste Pestalozzi consiste in una sbarra omogenea di sezione trascurabile, massa M e lunghezza 2R con due sfere omogenee incollate agli estremi di massa rispettivamente $m_1 = 3M$ e $m_2 = 2M$ ed entrambe di raggio R/2 (vedi figura). L'artista, molto soddisfatto della sua opera, decide di attaccarla alla parete verticale del suo salotto. Rispetto al sistema di riferimento della figura, determinare:



a) a quale distanza dall'origine O deve conficcare il chiodo affinchè l'opera stia ferma in posizione orizzontale;
Purtroppo l'artista ha messo un chiodo troppo piccolo e ad un certo istante l'opera cade, determinare:
b) l'accelerazione traslazionale del centro di massa dell'opera ;
c) l'accelerazione angolare attorno al centro di massa dell'opera stessa.
I momenti di inerzia di una sfera (massa M e raggio R) e di una sbarra (massa M e lunghezza L) rispetto ai loro cm sono:
$I_{sfera} = \frac{2}{5}MR^2$ e $I_{sbarra} = \frac{1}{12}ML^2$

6) Enunciare e discutere il terzo principio della dinamica.

Soluzioni compito:

Esercizio 1:

a)

Poiché la forza è espressa da $\vec{F}(t) = -\alpha x\hat{i} + \beta\hat{j} - \gamma\hat{k}$ le dimensioni fisiche di α, β e γ sono:
$[\alpha] = [F]/[L] = [M][L][T]^{-2}[L]^{-1} = [M][T]^{-2}$
$[\beta] = [\gamma] = [F] = [M][L][T]^{-2}$

b)

Le equazioni del moto si potevano ricavare immediatamente guardando l'espressione della forza (**soluzione veloce**), oppure applicando la $\vec{F} = m\vec{a}$ (**soluzione dettagliata**). Vediamo i due metodi:

1) soluzione veloce
Dall'espressione della forza $\vec{F}(t) = -\alpha x\hat{i} + \beta\hat{j} - \gamma\hat{k}$ si vede subito che lungo $\hat{i}$ è una forza elastica, mentre lungo $\hat{j}$ e $\hat{k}$ è una forza costante rispettivamente positiva e negativa; l'equazione del moto sarà dunque un moto armonico lungo $\hat{i}$, un moto uniformemente accelerato lungo $\hat{j}$ ed un moto uniformemente decelerato lungo $\hat{k}$:

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = x_o \cos\omega t = \cos t \\ y(t) = y_o + v_{o,y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = v_o t + \frac{\beta}{2m}t^2 = 2t + t^2 \\ z = z_o + v_{o,z}t + \frac{1}{2}a_z t^2 = z_o - \frac{\gamma}{2m}t^2 = 3 - \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$$

Le costanti A e φ del moto armonico sono state ottenute imponendo le condizioni iniziali $\begin{cases} x(o) = x_o = A\cos\varphi \\ \dot{x}(o) = 0 = -A\omega\sin\varphi \end{cases} \rightarrow \varphi = 0$ e $A = x_o$ mentre ni moti uniformemente accelerato, l'accelerazione è stata ovviamente ricavata da $\vec{a} = \vec{F}/m$.

2) soluzione dettagliata
Per determinare le equazioni del moto del punto materiale si parte dalla $\vec{F} = m\vec{a}$ da cui si ricava l'accelerazione $\vec{a} = \vec{F}/m$, poi per integrazione si ottiene la velocità $\int d\vec{v} = \int \vec{a}dt$ ed infine sempre per integrazione si ottiene l'equazione del moto $\int d\vec{r} = \int \vec{v}dt$. Nelle tre coordinate si scrive:

$$\begin{cases} a_x = F_x/m = -\frac{\alpha x}{m} \\ a_y = F_y/m = \frac{\beta}{m} \\ a_z = F_z/m = -\frac{\gamma}{m} \end{cases}$$

e da questa scrivendo la definizione di velocità si ottiene

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\alpha x}{m} \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{\beta}{m} \\ \frac{dv_z}{dt} = -\frac{\gamma}{m} \end{cases}$$

che integrata $\begin{cases} \int_{v_{xo}}^{v_x} dv_x = \int_{t_o}^{t} -\frac{\alpha x}{m} dt \quad \rightarrow \quad \text{non si può procedere} \\ \int_{v_{yo}}^{v_y} dv_y = \int_{t_o}^{t} \frac{\beta}{m} dt \quad \rightarrow \quad v_y - v_{y_o} = \frac{\beta}{m} t \quad \rightarrow \quad v_y = v_o + \frac{\beta}{m} t \\ \int_{v_{zo}}^{v_z} dv_z = \int_{t_o}^{t} -\frac{\gamma}{m} dt \quad \rightarrow \quad v_z - v_{z_o} = -\frac{\gamma}{m} t \quad \rightarrow \quad v_z = -\frac{\gamma}{m} t \end{cases}$

Purtroppo lungo x non è possibile seguire questa strada in quanto non si conosce la dipendenza di x dal tempo $x = x(t)$, ma si può riconoscere subito che l'equazione differenziale

$a_x = -\frac{\alpha x}{m} \quad \rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} x = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{con} \quad \omega^2 = \frac{\alpha}{m}$ è quella di un oscillatore armonico che ha come soluzione generale $x = A\cos(\omega t + \varphi)$. Per ottenere le costanti A e φ basta imporre le condizioni iniziali: $\begin{cases} x(o) = x_0 = A\cos\varphi \\ \dot{x}(o) = 0 = -A\omega \sin\varphi \end{cases} \quad \rightarrow \quad \varphi = 0$ e $A = x_0$ da cui si ricava l'equazione del moto lungo x

$x(t) = x_0 \cos\omega t$

Come anticipato, per ottenere l'equazione del moto lungo y e z si scrive:

$$\begin{cases} \int_{y_0}^{y} dy = \int_{t_0}^{t} \left(v_0 + \frac{\beta}{m} t \right) dt \quad \rightarrow \quad y - y_0 = v_0 t + \frac{\beta}{2m} t^2 \quad \rightarrow \quad y = v_0 t + \frac{\beta}{2m} t^2 \\ \int_{z_0}^{z} dz = \int_{t_0}^{t} \left(-\frac{\gamma}{m} t \right) dt \quad \rightarrow \quad z - z_0 = -\frac{\gamma}{2m} t^2 \quad \rightarrow \quad z = z_0 - \frac{\gamma}{2m} t^2 \end{cases}$$

Riassumendo, l'equazione del moto è la seguente:

$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos\omega t = \cos t \\ y(t) = v_0 t + \frac{\beta}{2m} t^2 = 2t + t^2 \quad \text{(l'ultima espressione è stata ricavata ponendo m=1 kg) Si evince che il moto} \\ z = z_0 - \frac{\gamma}{2m} t^2 = 3 - \frac{3}{2} t^2 \end{cases}$

è composto da un moto oscillatorio lungo x e da due moti parabolici lungo y e z.

c)

Anche in questo caso la soluzione poteva essere "vista" velocemente (**soluzione veloce**) oppure ricavata nei dettagli (**soluzione dettagliata**). Vediamo i due metodi.

1) soluzione veloce

L'accelerazione nell'istante iniziale è data da: $\vec{a} = -\frac{\alpha x_0}{m} \hat{i} + \frac{\beta}{m} \hat{j} - \frac{\gamma}{m} \hat{k}$, mentre la velocità nello stesso istante iniziale è data da $\vec{v} = v_0 \hat{j}$. Essendo la velocità diretta solo lungo $\hat{j}$ significa che l'accelerazione tangenziale sarà anch'essa diretta lungo $\hat{j}$ → $\vec{a}_t = \frac{\beta}{m} \hat{j}$, mentre quella centripeta sarà la parte restante

$\vec{a}_n = -\dfrac{\alpha x_o}{m}\hat{i} - \dfrac{\gamma}{m}\hat{k}$. A questo punto il raggio di curvatura può essere ricavato da

$$\rho = \frac{v_o^{\,2}}{|\vec{a}_n|} = \frac{v_o^{\,2}}{\sqrt{\left(\frac{\alpha x_o}{m}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{m}\right)^2}} = \frac{m v_o^{\,2}}{\sqrt{(\alpha x_o)^2 + \gamma^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$ ottenuto ponendo m=1 kg.

2) soluzione dettagliata

Per determinare il raggio di curvatura della traiettoria nell'istante iniziale è necessario determinare prima l'accelerazione in coordinate intrinseche $a = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t\hat{u}_t + a_n\hat{u}_n = a_t\hat{u}_t + \dfrac{v^2}{\rho}\hat{u}_n$ dove

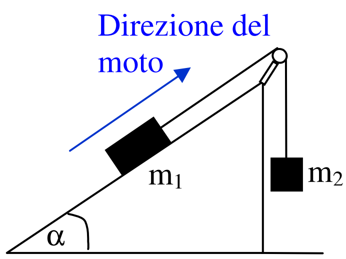
$$\vec{a}_t = \left(\frac{\vec{a}\bullet\vec{v}}{v^2}\right)\vec{v} = \frac{\left(-\frac{\alpha x_o}{m}\hat{i} + \frac{\beta}{m}\hat{j} - \frac{\gamma}{m}\hat{k}\right)\bullet\left(v_o\hat{j}\right)}{v_o^{\,2}} v_o\hat{j} = \frac{\frac{\beta v_o}{m}}{v_o^{\,2}} v_o\hat{j} = \frac{\beta}{m}\hat{j}$$

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t = -\frac{\alpha x_o}{m}\hat{i} + \frac{\beta}{m}\hat{j} - \frac{\gamma}{m}\hat{k} - \frac{\beta}{m}\hat{j} = -\frac{\alpha x_o}{m}\hat{i} - \frac{\gamma}{m}\hat{k} \quad \rightarrow \quad |\vec{a}_n| = \sqrt{\left(\frac{\alpha x_o}{m}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{m}\right)^2}$$

E dunque da $|\vec{a}_n| = \dfrac{v_o^{\,2}}{\rho}$ si ricava $\rho = \dfrac{v_o^{\,2}}{\sqrt{\left(\frac{\alpha x_o}{m}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{m}\right)^2}} = \dfrac{m v_o^{\,2}}{\sqrt{(\alpha x_o)^2 + \gamma^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{10}}$ ottenuto ponendo m=1 kg.

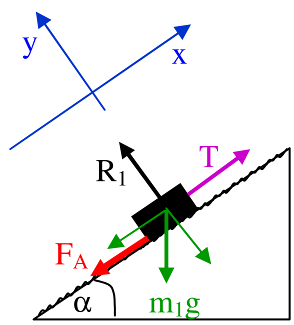
Esercizio 2

Per capire il verso del moto prima di arrivare alla condizione di staticità, si guarda il sistema senza considerare l'attrito del piano inclinato e la molla: in questa condizione abbiamo che $m_2 g > m_1 g sen\,\alpha$ dunque la massa m_1 tende a salire mentre la m_2 tende a scendere (figura a lato); questo automaticamente definisce il verso della forza di attrito sul piano inclinato. In realtà il sistema (due masse e la molla) può raggiungere la condizione di staticità in due diversi modi (portando a differenti soluzioni considerate tutte corrette), a seconda di dove sono stati inizialmente posizionati i corpi, in particolare: nell'ipotesi che la massa m_1 sia stata posizionata in fondo al piano inclinato allora questa salirà lungo il piano stesso (dunque la forza di attrito punterà verso il basso) fino a che la molla non viene compressa, mentre se la massa m_1 è posta in alto la molla risulterà troppo compressa e dunque la massa m_1 scenderà lungo il piano (la forza di attrito in questo caso punterà verso l'alto) fino a trovare la condizione di staticità. Nella soluzione sottostante viene considerato il primo caso (con il verso del moto verso l'alto) e dunque la forza di attrito verso il basso. Ripeto: al fine della correzione del compito ENTRAMBE LE SOLUZIONI SONO STATE CONSIDERATE CORRETTE.



a)b)c)

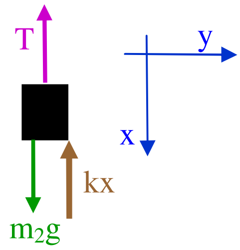
Scegliamo un sistema di riferimento con l'asse X diretta come una possibile direzione del moto e l'asse Y perpendicolare ad essa e scriviamo la $\vec{F} = m\vec{a}$ per i corpi m1, m2 e la molla.



Sul corpo m_1 agiscono 4 forze che in condizioni di staticità devono dare risultante nulla $\vec{T}+\vec{R}_1+\vec{P}_1+\vec{F}_a=0$ che espresso lungo gli assi X e Y $\begin{cases} T-m_1 g\sin\alpha - F_a = 0 \\ R_1 - m_1 g\cos\alpha = 0 \end{cases} \rightarrow$

$$\begin{cases} T-m_1 g\sin\alpha-\mu_s m_1 g\cos\alpha=0 \\ R_1=m_1 g\cos\alpha \end{cases}$$

(poiché la forza di attrito è data da: $|\vec{F}_a| = \mu_s R_1 = \mu_s m_1 g\cos\alpha$ ottenuta usando l'espressione lungo Y).



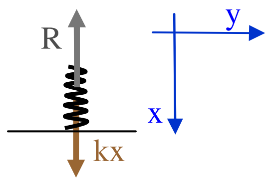
Sul corpo m_2 agiscono 3 forze che ovviamente devono dare risultante nulla $\vec{T}+\vec{P}_2+\vec{F}_e=0$ dove $\vec{T}$ è la stessa tensione applicata sul corpo m_1 in quanto la carrucola ha massa trascurabile e $\vec{F}_e$ è la forza elastica esercitata dalla molla. In questo caso le forze sono tutte dirette lungo X e si ottiene:

$$-T+m_2 g-kx=0$$

dove x è la compressione della molla (supponendo che la lunghezza a riposo della molla sia nulla visto che non era specificato nel testo).

La condizione di staticità va posta anche sulla molla dove agisce la reazione del piano orizzontale $\vec{R}$ e la sua stessa forza data dalla compressione $k\vec{x}$; entrambe le forze sono dirette lungo l'asse X e si ottiene $-R+kx=0$

Mettendo insieme tutti i pezzi si ottiene:



$$\begin{cases} T-m_1 g\sin\alpha-\mu_s m_1 g\cos\alpha=0 \\ -T+m_2 g-kx=0 \\ -R+kx=0 \end{cases}$$

Queste sono 3 equazioni in 3 incognite ($R, x \text{ e } T$) che risolte danno:

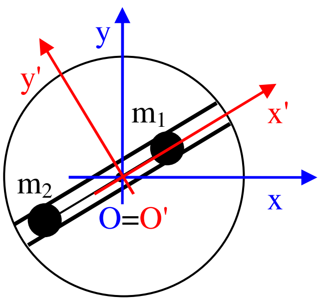
$$\begin{cases} T=m_1 g(\sin\alpha+\mu_s\cos\alpha)=7.45\ N \\ x=-\dfrac{m_1 g}{k}(\sin\alpha+\mu_s\cos\alpha)+\dfrac{m_2 g}{k}=0.12\ m \\ R=-m_1 g(\sin\alpha+\mu_s\cos\alpha)+m_2 g=12.2\ N \end{cases}$$

Come ci si poteva aspettare la reazione vincolare del piano orizzontale risulta $R=m_2 g-T$.

Esercizio 3

a)

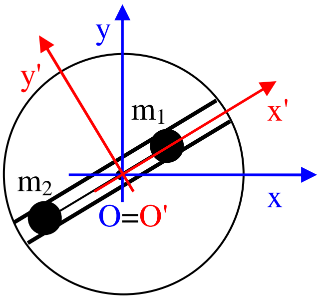
Anche in questo caso la soluzione poteva essere ricavata subito (**soluzione veloce**), oppure in maniera molto dettagliata (**soluzione dettagliata**). Vediamo i 2 metodi.



1) soluzione veloce

Rispetto ad un sistema di riferimanto SdR mobile O'X'Y'Z' con l'asse X' che segue le due masse (vedi figura) e l'asse Z' è uscente dal foglio, i due corpi sono fermi e dunque la risultante delle forze su di loro deve essere nulla. A parte le forze che ovviamente si annullano a vicenda (tipo peso e reazione vincolare), sui due corpi agiscono la tensione del filo (che è la forza centripeta) e la forza centrifuga $\begin{cases} m_1 \rightarrow \\ m_2 \rightarrow \end{cases} \begin{cases} -T+m_1\,\omega_o^{\,2} r_1'=0 \\ -T+m_2\,\omega_o^{\,2} r_2'=0 \end{cases}$ uguagliando le due tensioni si ottiene $m_1\omega^2{}_o r_1' = m_2\omega^2{}_o r_2'$ con il vincolo che $l = r_1' + r_2'$, da cui si ricavano le soluzioni $\begin{cases} r_1' = \dfrac{m_2\, l}{m_1+m_2} \\ r_2' = \dfrac{m_1\, l}{m_1+m_2} \end{cases}$

2) soluzione dettagliata

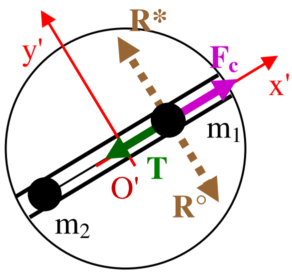


Rispetto ad SdR fisso OXYZ (Z esce dal foglio) come in figura, i corpi m_1 e m_2 hanno un moto circolare uniforme e la forza centripeta che fa loro ruotare è data dalla tensione del filo. Rispetto invece ad un SdR mobile O'X'Y'Z' (l'asse Z' è uscente dal foglio e coincide con l'asse Z) con l'asse X' che segue le due masse, i due corpi sono fermi e dunque la risultante delle forze su di loro deve essere nulla. Studiamo la $\vec{F}' = m\vec{a}'$ per i due corpi rispetto al SdR mobile.

Il corpo m1 si trova ad una distanza r_1' dal centro O' e sente una forza $\vec{F}_1'$ data da:

$$\vec{F}_1' = \vec{F}_{reali,1} + \vec{F}_{fittizie,1} = \vec{F}_{reali,1} - 2m_1\vec{\omega}\times\vec{v}_1' - m_1\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_1'\right) - m_1\,\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_1' - m_1 a_{oo'} = 0$$

vediamo i vari termini:



- $\vec{F}_{reali,1} = \vec{T} + \vec{R}_1 - \vec{P}_1 + \vec{R}* - \vec{R}° = \vec{T} + \vec{R}* - \vec{R}°$

dove

$\vec{T} = -|\vec{T}|\,\hat{i}'$ è la tensione del filo ed è stata posta uguale a T e non T_1 in quanto risulta uguale a quella esercitata sul corpo di massa m_2;

$\vec{R}_1 = |\vec{R}_1|\,\hat{k}'$ è la reazione vincolare della piattaforma diretta lungo $\hat{k}'$ ed è controbilanciata dalla forza peso $\vec{P}_1 = -m_1 g\hat{k}'$;

$\vec{R}* - \vec{R}° = |\vec{R}*|\,\hat{j}' - |\vec{R}°|\,\hat{j}'$ sono le reazioni vincolari $\vec{R}$ prodotte dalle due pareti della guida e sono dirette lungo $\hat{j}'$;

$\vec{F}_{fittizie,1} = -m_1\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_1'\right) = m_1\omega^2{}_o r_1'\,\hat{i}'$ sono date dalla sola forza centrifuga (F_c in figura), poiché i termini $-2m_1\vec{\omega}\times\vec{v}_1'$, $-m_1\,\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_1'$ e $-m_1 a_{oo'}$ sono nulli dato che $\vec{v}_1' = 0$, $\dot{\vec{\omega}} = 0$ e $a_{oo'} = 0$ (la forza centrifuga è diretta lungo $\hat{i}'$ poiché $\vec{\omega}$ è diretta lungo $\hat{k}'$).

Pertanto sul corpo m_1 agiscono 4 forze

$$-\vec{T} + \vec{R}* - \vec{R}° + m_1\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_1'\right) = -T\,\hat{i}' + |\vec{R}*|\,\hat{j}' - |\vec{R}°|\,\hat{j}' + m_1\omega^2{}_o r_1'\,\hat{i}' = 0 \rightarrow$$

Che devono dare risultante nulla sia lungo $\hat{i}'$ che $\hat{j}'$:

$$\begin{cases} -T+m_1\,\omega_o^{\,2} r_1'=0 \\ R*-R°=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T=m_1\,\omega_o^{\,2} r_1' \\ R*=R° \end{cases}$$

Dall'equazione lungo $\hat{j}'$ si evince che le reazioni vincolari delle due pareti della guida devono eguagliarsi, in ogni caso tutte le forze che agiscono lungo $\hat{j}'$ non contribuiscono alla determinazione delle posizioni di equilibrio di $\vec{r}_1'$ ed $\vec{r}_2'$ (che sono dirette lungo x').

Dall'equazione lungo $\hat{i}'$ si ottiene

$T = m_1 \omega^2{}_o r_1'$

Le stesse considerazioni si fanno per il corpo di massa m_2 ottenendo:

$T = m_2 \omega^2{}_o r_2'$

Le due tensioni sono uguali dunque → $m_1 \omega^2{}_o r_1' = m_2 \omega^2{}_o r_2'$ con il vincolo che $l = r_1' + r_2'$. Risolvendo il sistema si ottiene : $\begin{cases} r_1' = \dfrac{m_2\, l}{m_1 + m_2} \\ r_2' = \dfrac{m_1\, l}{m_1 + m_2} \end{cases}$

b)

Anche in questo caso la soluzione poteva essere vista subito (**soluzione veloce**) oppure in maniera dettagliata (**soluzione dettagliata**). Vediamo i due metodi.

1) soluzione veloce

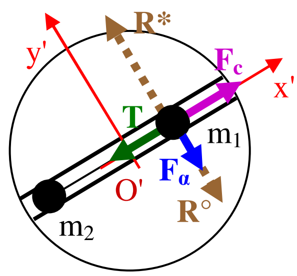
Rispetto al caso precedente nasce una forza fittizia in più data da $-m_1 \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_1'$ però questa forza è diretta lungo $\hat{j}'$ e non contribuisce dunque alla determinazione delle posizioni di equilibrio di $\vec{r}_1'$ ed $\vec{r}_2'$ (che sono dirette lungo x') che rimangono uguali al caso precedente.

2) soluzione dettagliata

Studiamo sempre la $\vec{F}' = m\vec{a}'$ per i due corpi rispetto al SdR mobile. Come nel caso precedente, il corpo m_1 si trova ad una distanza r_1' dal centro O' e sente una forza $\vec{F}_1'$ data da:

$\vec{F}_1' = \vec{F}_{reali,1} + \vec{F}_{fittizie,1} = \vec{F}_{reali,1} - 2m_1 \vec{\omega} \times \vec{v}_1' - m_1 \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_1') - m_1 \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_1' - m_1 a_{oo'} = 0$

Vediamo i vari termini:



$\vec{F}_{reali,1} = \vec{T} + \vec{R}_1 - \vec{P}_1 + \vec{R}* - \vec{R}° = \vec{T} + \vec{R}* - \vec{R}°$

per quanto riguarda le forze reali, tutto è uguale al caso precedente.

$\vec{F}_{fittizie,1} = -m_1 \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_1') - m_1 \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_1'$ sono date dalla forza centrifuga $-m_1 \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_1') = m_1 \alpha^2 t^2 r'^2 \hat{i}'$ (F_c in figura) e dal termine $-m_1 \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_1' = -m_1 \alpha r_1' \hat{j}'$ (F_α in figura) che adesso è diverso da zero in quanto il modulo della velocità angolare $\vec{\omega}$ varia nel tempo: con la regola della mano destra si trova che la forza centrifuga è diretta lungo $\hat{i}'$ come nel caso precedente, mentre la forza derivante dalla variazione del modulo della velocità angolare è diretta lungo $-\hat{j}'$.

I termini $-2m_1 \vec{\omega} \times \vec{v}_1'$ e $-m_1 a_{oo'}$ sono nulli poiché $\vec{v}_1' = 0$ e $a_{oo'} = 0$.

Sul corpo m_1 agiscono dunque 5 forze →
$$-\vec{T}+\vec{R}^*-\vec{R}^\circ+m_1\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_1')-m_1\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_1'=-T\hat{i}'+|\vec{R}^*|\hat{j}'-|\vec{R}^\circ|\hat{j}'+m_1\alpha^2t^2r_1'\hat{i}'-m_1\alpha r_1'\hat{j}'=0$$
Che devono dare risultante nulla sia lungo $\hat{i}'$ che $\hat{j}'$, dunque:
$$\begin{cases}-T+m_1\alpha^2t^2r_1'=0\\ R^*-R^\circ-m_1\alpha r_1'=0\end{cases}$$

Dall'equazione lungo $\hat{j}'$ si evince soltanto che la reazione delle due pareti della guida deve eguagliare la forza fittizia derivante dalla variazione del modulo della velocità angolare, in ogni caso tutte le forze che agiscono lungo $\hat{j}'$ non contribuiscono alla determinazione delle posizioni di equilibrio di $\vec{r}_1'$ ed $\vec{r}_2'$ (che sono dirette lungo x').
Dall'equazione lungo $\hat{i}'$ si ottiene
$$T=m_1\alpha^2t^2r_1'$$
Le stesse considerazioni si fanno per il corpo di massa m_2 ottenendo:
$$T=m_2\alpha^2t^2r_2'$$
Le due tensioni sono uguali dunque → $m_1\alpha^2t^2r_1'=m_2\alpha^2t^2r_2'$ con il vincolo che $l=r_1'+r_2'$. Risolvendo il sistema si ottiene che: $\begin{cases}r_1'=\dfrac{m_2\,l}{m_1+m_2}\\ r_2'=\dfrac{m_1\,l}{m_1+m_2}\end{cases}$ stesso risultato del caso precedente e lo si poteva anche capire subito in quanto l'unica forza in più è diretta lungo $\hat{j}'$ e non può contribuire alla determinazione delle posizioni di equilibrio di $\vec{r}_1'$ ed $\vec{r}_2'$.

Esercizio 4

a)

La costante β ha dimensioni [L^{-1}] dovendo rendere l'esponenziale adimensionale e dunque la costante α ha dimensioni fisiche fondamentali [MT^{-2}] e unità di misura *N/m* oppure *Kg/ s*^{2} .

b)

Il rotore del campo è nullo, dunque il campo è conservativo. Calcolando il lavoro su un cammino rettilineo a tratti tra l'origine O(0,0,0) ed un punto generico C(*x,y,z*)

$$L_{OP}=\int_{000}^{x00}F_x\,dx+\int_{x00}^{xy0}F_y\,dy+\int_{xy0}^{xyz}F_z\,dz=\int_{000}^{x00}\alpha\beta e^{\beta x}yz\,dx+\int_{x00}^{xy0}\alpha e^{\beta x}z\,dy+\int_{xy0}^{xyz}\alpha e^{\beta x}y\,dz=\alpha e^{\beta x}yz$$

dunque $L_{OP}=V(0,0,0)-V(x,y,z)=\alpha e^{\beta x}yz$ da cui segue l'energia potenziale $V(x,y,z)=-\alpha e^{\beta x}yz$.

c)

Visto che il campo è conservativo, il lavoro tra i punti R(0,0,0) e S(1,1,1) si ottiene dalla relazione:

$L_{RS} = V(R) - V(S) = V(0,0,0) - V(1,1,1) = \alpha e^{\beta}$

Esercizio 5

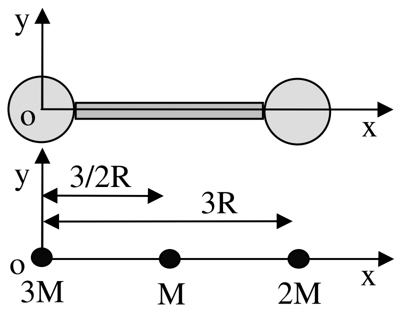
a)

Si può risolvere in due modi differenti:

1) il punto dove mettere il chiodo è il centro di massa (cm) del sistema:
2) imponendo le equazioni della statica.

Vediamoli entrambi.

1) Dato che tutti i corpi sono omogenei possiamo valutare il cm supponendo che i tre corpi siano oggetti puntiformi avente la massa citata nel testo e posizionati nel cm del loro corpo (vedi figura), dunque prendendo come sistema di riferimento quello in figura (ma verrebbe lo stesso risultato rispetto a qualsiasi sistema di riferimento):

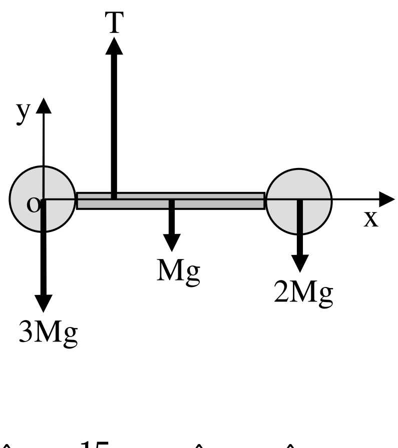


$$x_{cm} = \frac{M \cdot \frac{3}{2}R + 2M \cdot 3R}{3M + M + 2M} = \frac{\left(\frac{3}{2}+6\right)MR}{6M} = \frac{15}{12}R = \frac{5}{4}R$$

Ovviamente $y_{cm} = 0$

2) Imponiamo le equazioni della statica $\begin{cases} \sum \vec{F} = 0 \\ \sum \vec{M} = 0 \end{cases}$

Le forze che agiscono sul sistema sono le 3 forze peso (le 2 sfere e la sbarra) e la reazione vincolare dovuta al chiodo che chiamiamo $\vec{T}$ e che è applicata sul cm (ad una distanza incognita d dall'origine O). Tutte le forze sono dirette lungo $\hat{j}$ dunque ometto la notazione vettoriale. Per quanto riguarda il momento della forza $\vec{M}$ scelgo come polo l'origine O del sistema di riferimento



$$\begin{cases} -3Mg - Mg - 2Mg + T = 0 \\ \left(R + \frac{R}{2}\right)\hat{i} \times -Mg\hat{j} + 3R\hat{i} \times -2Mg\hat{j} + d\hat{i} \times T\hat{j} = -\frac{3}{2}RMg\hat{k} - 6RMg\hat{k} + dT\hat{k} = -\frac{15}{2}RMg\hat{k} + dT\hat{k} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = 6Mg \\ d6Mg = \frac{15}{2}RMg \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T = 6Mg \\ d = x_{cm} = \frac{15}{12}R = \frac{5}{4}R \end{cases}$$ stesso risultato di prima.

Ovviamente $y_{cm} = 0$.

b)

Anche a questa domanda si poteva rispondere in maniera veloce (**soluzione veloce**) o dettagliata (**soluzione dettagliata**). Vediamole entrambe.

1) soluzione veloce

Ovviamente quando il chiodo si stacca l'oggetto è sottoposto alla sola forza di gravità e dunque cade con $\vec{a}_{cm} = -g\hat{j}$ diretta ovviamente lungo $\hat{j}$.

2) soluzione dettagliata

Per ottenere l'accelerazione traslazionale bisogna scrivere la prima equazione cardinale della meccanica $\vec{F} = M_{sist}\vec{a}_{cm}$

dove $\vec{F}$ è la sommatoria delle forze esterne (i 3 pesi visto che non c'è più la reazione vincolare del chiodo) → $\vec{F} = -6Mg\hat{j}$ e

M_{sist} è la massa di tutto il sistema ($M_{sist} = 6M$). Dunque:

$-6Mg\hat{j} = 6M\vec{a}_{cm}$ → $\vec{a}_{cm} = -g\hat{j}$ il sistema cade con l'accelerazione di gravità (risultato ampiamente prevedibile).

c)

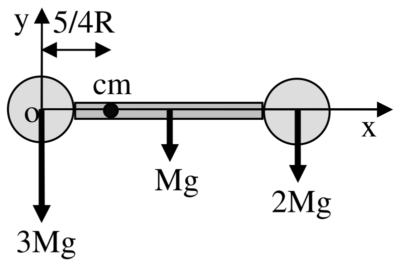
Anche a questa domanda si poteva rispondere in maniera veloce (**soluzione veloce**) o dettagliata (**soluzione dettagliata**). Vediamole entrambe.

1) soluzione veloce

I corpi che compongono il sistema (le 2 sfere e la sbarra) cadono con la stessa accelerazione (e dunque la stessa velocità) e dunque la rotazione attorno al centro di massa è nulla $\vec{\alpha} = 0$.

2) soluzione dettagliata

Per ottenere l'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$ bisogna scrivere la seconda equazione cardinale della meccanica $\vec{M}_{cm} = I_{sist,cm}\vec{\alpha}_{cm}$ dove



$\vec{M}_{cm}$ è il momento delle forze esterne rispetto al cm,

$I_{sist,cm}$ è il momento d'inerzia del sistema rispetto al suo cm

$\vec{\alpha}_{cm}$ è l'accelerazione angolare del sistema rispetto al suo cm.

$$\vec{M}_{cm} = -\frac{5}{4}R\hat{i} \times -3Mg\hat{j} \quad +\left(\frac{3}{2}R - \frac{5}{4}R\right)\hat{i} \times -Mg\hat{j} \quad +\left(3R - \frac{5}{4}R\right)\hat{i} \times -2Mg\hat{j} =$$
$$= \frac{15}{4}MgR\hat{k} \quad -\frac{1}{4}MgR\hat{k} \quad -\frac{7}{2}MgR\hat{k} = -\frac{7}{2}MgR\hat{k} = 0$$

Dunque se il momento della forza è nullo segue che l'accelerazione angolare è anch'essa nulla

$\vec{\alpha} = 0$

il corpo cadendo non ruota. Anche questo risultato era prevedibile poiché in assenza di attrito dell'aria tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione (e di conseguenza con la stessa velocità) e dunque qualunque sistema sottoposto alla sola forza peso, cadendo non potrà mai ruotare. Nella realtà noi vediamo gli oggetti che cadono ruotando poichè sono sottoposti all'attrito viscoso dell'aria.