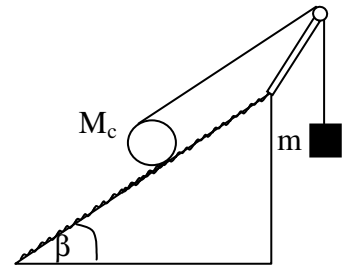


1) Un cilindro omogeneo di massa $M_c = 25 \text{ Kg}$ e raggio $R = 30 \text{ cm}$ rotola senza strisciare su un piano scabro con $\mu_s = 0.3$ e inclinato di un angolo $\beta = 30^\circ$. Attorno al cilindro é arrotolata una corda inestensibile, di massa trascurabile e parallela al piano inclinato, al cui secondo estremo é attaccato un corpo puntiforme di massa $m = 5 \text{ kg}$ appeso verticalmente tramite una carrucola ideale (vedi figura).

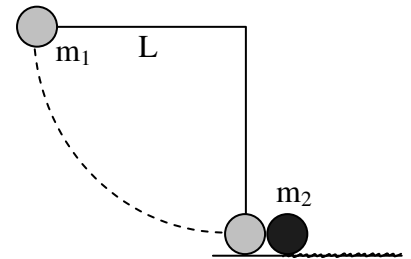


Determinare:

- l'accelerazione del centro di massa del cilindro;
- l'accelerazione del corpo di massa m ;
- la tensione del filo;
- l'accelerazione angolare del cilindro.

Il momento di inerzia di un cilindro di massa M e raggio R rispetto al suo cm é: $I_{cil} = \frac{1}{2}MR^2$

2) Un corpo puntiforme di massa $m_1 = 1 \text{ kg}$ é attaccato ad un filo teso, inestensibile, di massa trascurabile, lunghezza $L = 1 \text{ m}$ e fissato all'altra estremità ad un piano verticale (vedi figura). Il corpo, inizialmente fermo, é lasciato cadere da una posizione in cui il filo é orizzontale e nel punto più basso urta elasticamente un secondo corpo puntiforme di massa $m_2 = 1 \text{ kg}$, fermo su un piano scabro con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.3$. Determinare:



- la velocità dei due corpi subito dopo l'urto;
- il lavoro fatto dalla forza di attrito per fermare i due corpi;
- lo spazio totale percorso da ogni corpo dopo l'urto.

3) Dato il campo di forze $\vec{F}(x, y, z) = \alpha z^2 \hat{i} - \beta \hat{j} + 2\alpha xz \hat{k}$ determinare:

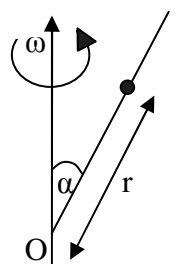
- le dimensioni fisiche delle costanti α e β ;
- se il campo è conservativo e nel caso calcolare l'energia potenziale in un punto $P(x, y, z)$;
- il lavoro compiuto dalla forza quando sposta il punto di applicazione da $A(2, 0, -1)$ a $B(0, 1, 1)$.

4) La posizione di un punto materiale é $\vec{r}(t) = \alpha \cos(\omega t) \hat{i} - \alpha \sin(\omega t) \hat{j} - \alpha \omega t \hat{k}$ con α e ω costanti, determinare:

- la velocità vettoriale media tra il tempo $t = 0$ e $t = \pi/2\omega$;
- la velocità scalare media tra il tempo $t = 0$ e $t = \pi/2\omega$;
- il raggio di curvatura al tempo $t = 0$.

5) Un fil di ferro di massa trascurabile inclinato di un angolo $\alpha = 30^\circ$ ruota con velocità angolare costante $|\vec{\omega}| = 10 \text{ rad/s}$ attorno ad un asse verticale. Sul filo é infilata una perlina (schematizzabile come punto materiale di massa m); determinare la posizione di equilibrio r della perlina nel caso:

- non ci sia attrito col filo;
- ci sia attrito statico col filo ($\mu_s = 0.3$) supponendo che inizialmente la perlina posta a distanza $r = 0.25 \text{ m}$ dall'origine (si trascuri la fase transitoria in cui la perlina si muove verso il punto di equilibrio).



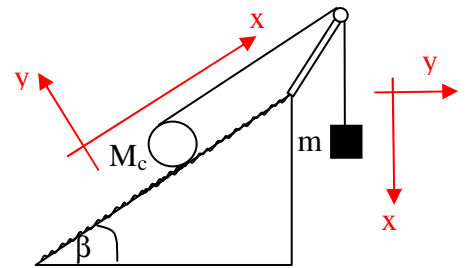
6) Enunciare e discutere il teorema di Huygens Steiner.

Soluzioni compito:

Esercizio 1:

a,b,c,d)

Fissiamo un sistema di riferimento con l'asse x diretto lungo il moto, l'asse y perpendicolare ad esso e l'asse z uscente dal foglio. A priori non si riesce a capire se il cilindro scenderà lungo il piano inclinato (e la massa m di conseguenza salirà verticalmente) oppure se salirà (e la massa scenderà), dunque fissiamo arbitrariamente un verso all'asse x (il cilindro sale) e poi saranno i segni delle varie accelerazioni a dirci se abbiamo fatto la scelta corretta (vedi figura).



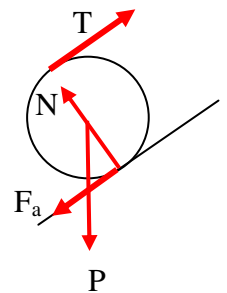
Per risolvere l'esercizio bisogna scrivere le equazioni cardinali della meccanica per il cilindro e per la massa m (in questo caso si riducono alla sola $\vec{F} = m\vec{a}$).

Massa $m \rightarrow$ agiscono 2 forze: la forza peso mg e la tensione del filo $T \rightarrow$

$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow mg - T = ma \text{ tutto diretto lungo l'asse } x$$

Cilindro $\rightarrow$ agiscono 4 forze: Peso $M_c g$, Tensione del filo T , Reazione vincolare del piano N e Forza di attrito statico F_a (responsabile del rotolamento senza strisciare) $\rightarrow$ equazioni cardinali della meccanica $\rightarrow$

$$\begin{cases} \vec{F} = M_c \vec{a}_{cm} \\ \vec{M} = I \vec{\alpha} \end{cases} \rightarrow \text{dove la seconda é calcolata rispetto al centro di massa del cilindro.}$$



vediamo la prima $\vec{T} + M_c \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_a = M_c \vec{a}_{cm}$ scomponiamola lungo gli assi x e y

$$\begin{cases} \hat{x} \rightarrow T - M_c g \sin \beta - F_a = M_c a_{cm} \\ \hat{y} \rightarrow N - M_c g \cos \beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T - M_c g \sin \beta - \mu_s N = M_c a_{cm} \\ N = M_c g \cos \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} T - M_c g \sin \beta - \mu_s M_c g \cos \beta = M_c a_{cm} \\ N = M_c g \cos \beta \end{cases}$$

vediamo la seconda $\vec{M} = I \vec{\alpha} \rightarrow$

le uniche forze che contribuiscono al momento della forza sono la tensione del filo T e la Forza di attrito statico F_a

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{T} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_a = -RT\hat{k} - R\mu_s N\hat{k} \text{ entrambe dirette lungo l'asse } z \rightarrow$$

$$\vec{M} = I \vec{\alpha} \rightarrow -RT\hat{k} - R\mu_s N\hat{k} = \frac{M_c R^2}{2} \vec{\alpha}$$

dato che il moto é un rotolamento puro possiamo utilizzare la relazione

$$\vec{\alpha} = \left| \frac{a_{cm}}{R} \right| \hat{k} \rightarrow \vec{M} = I \vec{\alpha} \rightarrow -RT\hat{k} - R\mu_s N \hat{k} = \frac{M_c R^2}{2} \frac{a_{cm}}{R} \hat{k} \quad \text{tutto diretto lungo l'asse } z \rightarrow$$

$$-T - \mu_s N = \frac{M_c}{2} a_{cm}$$

Ricapitolando, le relazioni trovate sono:

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ T - M_c g \sin \beta - \mu_s M_c g \cos \beta = M_c a_{cm} \\ N = M_c g \cos \beta \\ -T - \mu_s N = \frac{M_c}{2} a_{cm} \end{cases} \rightarrow 4 \text{ equazioni in 4 incognite } (T, a_{cm}, a, N)$$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{cases} a = -3g - \mu_s \frac{M_c}{m} g \cos \beta + \frac{M_c}{m} g \sin \beta \\ a_{cm} = 4 \frac{m}{M_c} g - 2g \sin \beta \\ T = 4mg + M_c g (\mu_s \cos \beta - \sin \beta) \\ N = M_c g \cos \beta \end{cases} \quad \text{Sostituendo i valori numerici:} \quad \begin{cases} a = -17.6 \text{ m/s}^2 \\ a_{cm} = -1.96 \text{ m/s}^2 \\ T = 137 \text{ kgm/s}^2 \\ N = 212 \text{ kgm/s}^2 \end{cases}$$

Poiché a_{cm} e a sono risultate negative significa che il moto del sistema é contrario a quello che avevamo supposto, dunque il cilindro scende e la massa m sale.

L'accelerazione angolare del cilindro é facilmente ricavabile dalla relazione

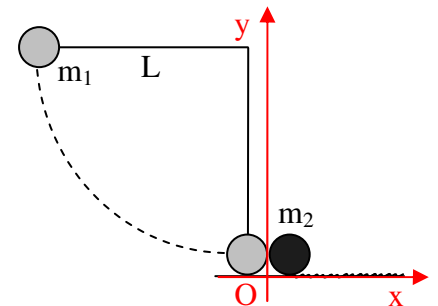
$$\vec{\alpha} = \frac{a_{cm}}{R} \hat{k} = 6.53 \hat{k} \text{ rad/s}^2 \rightarrow \text{rotazione antioraria}.$$

Esercizio 2:

a)

Sul corpo puntiforme di massa m_1 agiscono due forze: la forza peso verticale e la tensione del filo diretta lungo il filo. La forza peso é conservativa, mentre la tensione del filo non fa lavoro (é perpendicolare al moto), dunque possiamo ricavare la velocità del corpo prima dell'urto con la conservazione dell'energia meccanica. Rispetto ad un sistema di riferimento fisso (inerziale) come in figura, possiamo scrivere

$$E_{ini} = E_{fin}$$



dove l'istante iniziale é quello del corpo fermo in posizione orizzontale e l'istante finale é quello del corpo arrivato in posizione verticale $\rightarrow$

$$E_{ini} = mgL \quad \text{e} \quad E_{fin} = \frac{1}{2}mv_1^2 \rightarrow mgL = \frac{1}{2}mv_1^2 \rightarrow v_1 = \sqrt{2gL} = 4.4 \text{ m/s}$$

A questo punto il corpo m_1 urta il corpo m_2 elasticamente dunque imponiamo la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica del sistema. Il moto avviene interamente lungo l'asse x dunque si può omettere la notazione vettoriale

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \end{cases}$$

dove v'_1 (v'_2) è la velocità del corpo m_1 (m_2) dopo l'urto. Semplificando e tenendo in considerazione che i due corpi hanno la stessa massa si ottiene:

$$\begin{cases} v_1 = v'_1 + v'_2 \\ v_1^2 = v'^2_1 + v'^2_2 \end{cases} \quad \text{elevando al quadrato la prima espressione} \rightarrow \begin{cases} v_1^2 = v'^2_1 + v'^2_2 + 2v'_1 v'_2 \\ v_1^2 = v'^2_1 + v'^2_2 \end{cases} \quad \text{da cui}$$

$v'^2_1 + v'^2_2 + 2v'_1 v'_2 = v'^2_1 + v'^2_2 \rightarrow v'_1 v'_2 = 0$ verificata se e solo se uno dei due corpi si ferma (v'_i) dopo l'urto e l'altro di conseguenza acquista tutta la velocità del corpo 1 prima dell'urto. Vediamo i due casi:

$$1) \quad v'_2 = 0 \rightarrow v'_1 = v_1$$

dovuta al fatto che il corpo 1 non colpisce il corpo 2 e dunque procede il suo moto inalterato, mentre il corpo 2 era fermo e fermo rimane.

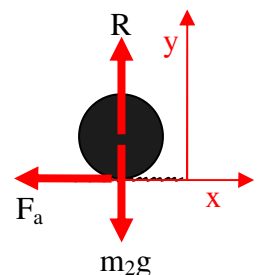
$$2) \quad v'_1 = 0 \quad \text{e} \quad v'_2 = v_1$$

dovuta effettivamente all'urto tra i 2 corpi (soluzione da accettare).

$$\text{Dopo l'urto: } v'_1 = 0 \quad \text{e} \quad v'_2 = \sqrt{2gL} = 4.43 \text{ m/s}$$

b)

Il corpo 1 è già fermo dunque basta calcolare il lavoro fatto per fermare il corpo 2. Sul corpo 2 agiscono 3 forze: la forza peso, la reazione vincolare del piano orizzontale e la forza di attrito (dato che il corpo 2 è un punto materiale le forze agiscono tutte nello stesso punto anche se in figura sono stati rappresentati in punti diversi per maggiore chiarezza). Le prime due forze non compiono lavoro perché perpendicolari al moto, dunque basta considerare la forza di attrito; poiché quest'ultima non è conservativa, il lavoro può essere calcolato indifferentemente dalla differenza di energia cinetica (teorema delle forze vive) o dalla differenza di energia meccanica. Scegliamo la prima :



$$L = T_{fin} - T_{ini} = 0 - \frac{1}{2}m_2 v'^2_2 = -\frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{1}{2}m2gL = -mgL = -9.8 \text{ J}$$

dove l'istante iniziale é quello subito dopo l'urto, mentre quello finale é quando la pallina si ferma. Il lavoro é ovviamente negativo.

c)

Scriviamo la $\vec{F} = m\vec{a}$ nelle direzioni x e y per il solo corpo 2 (il corpo 1 é fermo e dunque il suo spazio percorso dopo l'urto é nullo):

$$\begin{cases} \hat{x} \rightarrow -F_a = m_2 a \\ \hat{y} \rightarrow R - m_2 g = 0 \end{cases} \rightarrow \text{sappiamo che } |\vec{F}_a| = \mu_D |\vec{R}| \quad \text{dunque}$$

$$\begin{cases} -\mu_D |\vec{R}| = m_2 a \\ R = m_2 g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\mu_D g \\ R = m_2 g \end{cases}$$

Dove si evince che l'accelerazione é costante $\rightarrow$ il moto del corpo 2 é rettilineo uniformemente accelerato

$$\rightarrow \begin{cases} v_{2,fin} = v_{2,in} - \mu_D g t \\ s_{2,fin} = s_{2,in} + v_{2,in} t - \frac{1}{2} \mu_D g t^2 \end{cases}$$

dove $s_{2,fin}$ é lo spazio percorso dal corpo, $s_{2,in}$ é la posizione iniziale che é nulla perché scegliamo l'origine del nostro sistema di riferimento coincidente con la posizione in cui avviene l'urto, $v_{2,fin}$ é la velocità finale del corpo che risulta nulla in quanto dobbiamo calcolare il massimo percorso fatto (quando il corpo si ferma appunto) e $v_{2,in}$ é la velocità del corpo 2 dopo l'urto. Sostituendo:

$$\begin{cases} 0 = \sqrt{2gL} - \mu_D g t \\ s_{2,fin} = \sqrt{2gL} t - \frac{1}{2} \mu_D g t^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{2gL}}{\mu_D g} \\ s_{2,fin} = \sqrt{2gL} \frac{\sqrt{2gL}}{\mu_D g} - \frac{1}{2} \mu_D g \frac{2gL}{\mu_D^2 g^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{2gL}}{\mu_D g} \\ s_{2,fin} = \frac{L}{\mu_D} = \frac{1}{0.3} = 3.3 \text{ m} \end{cases}$$

Esercizio 3:

a)

La costante α ha dimensioni fisiche fondamentali

$$[\alpha] = \frac{[F]}{[L]^2} = \frac{[M][L][T]^{-2}}{[L]^2} = [M][L]^{-1}[T]^{-2} \quad \text{e unità di misura } N/m^2 \text{ oppure } Kg / m \text{ s}^2,$$

mentre la costante β ha dimensioni fisiche fondamentali

$[\beta] = [F] = [M][L][T]^{-2}$ e unità di misura N oppure $Kg\ m/s^2$.

b)

Il rotore del campo è nullo, dunque il campo è conservativo. Calcolando il lavoro su un cammino rettilineo a tratti tra l'origine $O(0,0,0)$ ed un punto generico $C(x,y,z)$

$$L_{OP} = \int_{000}^{x00} F_x dx + \int_{x00}^{xy0} F_y dy + \int_{xy0}^{xyz} F_z dz = \int_{000}^{x00} \alpha z^2 dx - \int_{x00}^{xy0} \beta dy + \int_{xy0}^{xyz} 2\alpha x z dz = -\beta y + \alpha x z^2$$

dunque $L_{OP} = V(0,0,0) - V(x,y,z) = -\beta y + \alpha x z^2$

da cui segue l'energia potenziale $V(x,y,z) = \beta y - \alpha x z^2$.

c)

Visto che il campo è conservativo, il lavoro tra i punti $A(2,0,-1)$ e $B(0,1,1)$ si ottiene dalla relazione:

$$L_{AB} = V(A) - V(B) = V(2,0,-1) - V(0,1,1) = -2\alpha - \beta$$

Esercizio 4:

a)

La velocità vettoriale media é data da: $\langle \vec{v}(t) \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_{fin}) - \vec{r}(t_{in})}{t_{fin} - t_{in}} = \frac{\vec{r}(\frac{\pi}{2\omega}) - \vec{r}(0)}{\frac{\pi}{2\omega}}$ dove

$$\vec{r}(0) = \alpha \hat{i}, \quad \vec{r}(\frac{\pi}{2\omega}) = -\alpha \hat{j} - \alpha \frac{\pi}{2} \hat{k} = -\alpha \left(\hat{j} + \frac{\pi}{2} \hat{k} \right) \quad \rightarrow \quad \Delta \vec{r} = -\alpha \left(\hat{j} + \frac{\pi}{2} \hat{k} \right) - \alpha \hat{i} = -\alpha \left(\hat{i} + \hat{j} + \frac{\pi}{2} \hat{k} \right)$$

Da cui $\langle \vec{v}(t) \rangle = \frac{-\alpha \left(\hat{i} + \hat{j} + \frac{\pi}{2} \hat{k} \right)}{\frac{\pi}{2\omega}} = \frac{-2\alpha\omega}{\pi} \left(\hat{i} + \hat{j} + \frac{\pi}{2} \hat{k} \right)$

b)

La velocità scalare media si ottiene calcolando la lunghezza del percorso Δs fatto dal punto materiale diviso per il tempo impiegato:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

La lunghezza del percorso è data da:

$$\Delta s = \int_{t_{in}}^{t_{fin}} |\vec{v}| dt \quad \text{con } |\vec{v}| \text{ modulo della velocità.}$$

Per calcolare il modulo della velocità valutiamo la velocità vettoriale istantanea:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\alpha\omega \sin(\omega t) \hat{i} - \alpha\omega \cos(\omega t) \hat{j} - \alpha\omega \hat{k} \quad \text{e facciamone il modulo}$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\alpha^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) + \alpha^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) + \alpha^2 \omega^2} = \sqrt{2} \alpha \omega$$

da qui si evince già che essendo il modulo della velocità costante, la velocità scalare media sarà

$$\langle v \rangle = |\vec{v}(t)| = \sqrt{2} \alpha \omega$$

comunque facciamo finta di non averlo notato e proseguiamo con il calcolo

$$\Delta s = \int_{t_{in}}^{t_{fin}} |\vec{v}| dt = \int_{t_{in}}^{t_{fin}} \sqrt{2} \alpha \omega dt = \sqrt{2} \alpha \omega \int_{t_{in}}^{t_{fin}} dt = \sqrt{2} \alpha \omega (t_{fin} - t_{in})$$

$$\text{Da cui } \langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\sqrt{2} \alpha \omega (t_{fin} - t_{in})}{(t_{fin} - t_{in})} = \sqrt{2} \alpha \omega$$

c)

Per ottenere il raggio di curvatura al tempo $t = 0$, bisogna scrivere l'accelerazione in coordinate intrinseche seguendo "la ricetta" tradizionale:

Innanzitutto valutiamo l'accelerazione in coordinate cartesiane al tempo $t = 0$:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha\omega^2 \cos(\omega t) \hat{i} + \alpha\omega^2 \sin(\omega t) \hat{j} = \alpha\omega^2 (-\cos(\omega t) \hat{i} + \sin(\omega t) \hat{j}) \rightarrow$$

$$\vec{a}(0) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha\omega^2 \hat{i}$$

Poi valutiamo la velocità istantanea (già calcolata) al tempo $t = 0$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\alpha\omega \sin(\omega t) \hat{i} - \alpha\omega \cos(\omega t) \hat{j} - \alpha\omega \hat{k} \rightarrow$$

$$\vec{v}(0) = -\alpha\omega \hat{j} - \alpha\omega \hat{k}$$

Parentesi:

Volendo si può arrivare direttamente alla soluzione notando che al tempo $t = 0$ l'accelerazione è diretta solo lungo $\hat{i}$, mentre la velocità (che dà la direzione tangenziale) non ha componente lungo tale asse; di conseguenza l'accelerazione non ha componente tangenziale ed è dunque solo centripeta $\rightarrow$

$$|\vec{a}_n| = |\vec{a}| = \frac{v^2}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{v^2}{|\vec{a}|} = \frac{2\alpha^2 \omega^2}{\alpha \omega^2} = 2\alpha$$

Chiusa parentesi.

A questo punto scriviamo l'accelerazione in coordinate intrinseche:

$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t \hat{t} + a_n \hat{n}$ con $\hat{t}$ ($\hat{n}$) é il versore tangente (normale) alla traiettoria dove:

$$a_t = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{-\alpha\omega^2 \hat{t} \cdot (-\alpha\omega \hat{j} - \alpha\omega \hat{k})}{\sqrt{2}\alpha\omega} = 0 \text{ e di conseguenza}$$

$$\vec{a}_n(0) = \vec{a}(0) = -\alpha\omega^2 \hat{t} \rightarrow |\vec{a}_n| = \sqrt{\alpha^2 \omega^4} = \alpha\omega^2$$

A questo punto il raggio di curvatura ρ é ricavabile dalla relazione da:

$$|\vec{a}_n| = \frac{v^2}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{v^2}{|\vec{a}_n|} = \frac{2\alpha^2 \omega^2}{\alpha\omega^2} = 2\alpha$$

Esercizio 5:

a)

Scegliamo un sistema di riferimento non inerziale solidale al filo che ruota (vedi figura, l'asse x' segue il tubo); siccome in questo sistema la perlina é ferma significa che la risultante delle forze é nulla $\rightarrow$

$$\sum \vec{F}' = 0 \text{ dove}$$

$$\vec{F}'_1 = \vec{F}_{reali,1} + \vec{F}_{fittizie,1} = \vec{F}_{reali,1} - 2m_1 \vec{\omega} \times \vec{v}'_1 - m_1 \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_1) - m_1 \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'_1 - m_1 \vec{a}_{oo'} = 0$$

Le forze reali sono la forza peso $\vec{P}$ e la reazione vincolare del filo $\vec{R}$, mentre tra le forze fittizie l'unica diversa da zero é la forza centrifuga $\vec{F}_c$ data dall'espressione

$$F_c = m\omega^2 d \text{ (diretta come in figura)}$$

dove d é la distanza della pallina dall'asse di rotazione.

Dunque $\sum \vec{F}' = 0$ diventa

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_c = 0$$

Scomponiamo lungo gli assi x' e y' $\begin{cases} \hat{x}' \rightarrow \\ \hat{y}' \rightarrow \end{cases}$

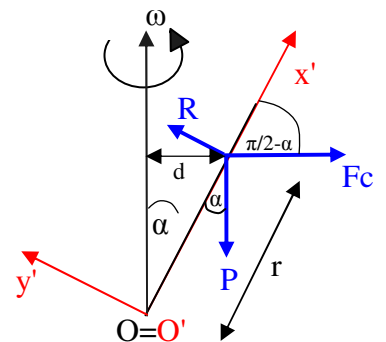
$$\begin{cases} F_c \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - mg \cos \alpha = F_c \sin \alpha - mg \cos \alpha = 0 \\ R - mg \sin \alpha - F_c \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = R - mg \sin \alpha - F_c \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m\omega^2 d \sin \alpha - mg \cos \alpha = 0 \\ R - mg \sin \alpha - m\omega^2 d \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Visto che la perlina può muoversi solo lungo l'asse x' per ottenere la posizione di equilibrio é sufficiente utilizzare la prima delle due espressioni:

$$\omega^2 d \sin \alpha = g \cos \alpha$$

Dove al posto di d utilizziamo la distanza r (come richiesta dal testo) misurata all'interno del tubo

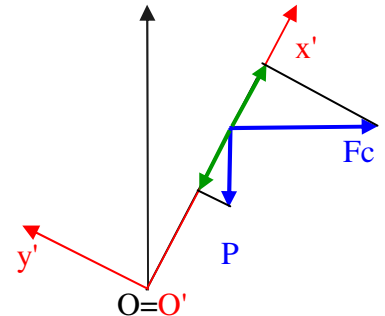
$$r \sin \alpha = d \rightarrow \text{dunque}$$



$$\omega^2 d \sin \alpha = g \cos \alpha \quad \rightarrow \quad \omega^2 r \sin^2 \alpha = g \cos \alpha \quad \rightarrow \quad r = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} = 0.34 \text{ m}$$

b)

Le forze agenti sulla perlina sono le stesse del caso precedente con l'aggiunta della forza di attrito statico diretta lungo il tubo. Per capire il verso della forza di attrito bisogna vedere quale tra la componente lungo il tubo della forza centrifuga e la componente della forza peso prevale (in figura sono rappresentate solo quelle). Dunque



Lungo il filo

$$\vec{F}_c + \vec{P} = F_c \sin \alpha - mg \cos \alpha = m\omega^2 d \sin \alpha - mg \cos \alpha = m(\omega^2 r \sin^2 \alpha - g \cos \alpha) = m(6.5 - 8.5) = -2m < 0$$

→ prevale la componente lungo il filo della forza peso che tende a far muovere la perlina verso l'interno, dunque la forza di attrito punta verso l'esterno.

Scegliamo lo stesso sistema di riferimento precedente e anche in questo caso deve valere

$$\sum \vec{F}' = 0 \rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_c + \vec{F}_{as} = 0$$

Scomponiamo lungo gli assi x' e y'

$$\begin{cases} \hat{x}' \rightarrow F_c \sin \alpha - mg \cos \alpha + F_{as} = 0 \\ \hat{y}' \rightarrow R - mg \sin \alpha - F_c \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m\omega^2 d \sin \alpha - mg \cos \alpha + F_{as} = 0 \\ R = mg \sin \alpha + m\omega^2 d \cos \alpha \end{cases}$$

Sapendo che $|\vec{F}_{as}| = \mu_s |\vec{R}| = \mu_s m(g \sin \alpha + \omega^2 d \cos \alpha)$ la prima espressione

diventa:

$$m\omega^2 d \sin \alpha = mg \cos \alpha - \mu_s m(g \sin \alpha + \omega^2 d \cos \alpha)$$

Sapendo che $r \sin \alpha = d$

$$\omega^2 r \sin^2 \alpha = g \cos \alpha - \mu_s (g \sin \alpha + \omega^2 r \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$r = \frac{g(\cos \alpha - \mu_s \sin \alpha)}{\omega^2 \sin \alpha (\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha)} = 0.18 \text{ m} \rightarrow$$

