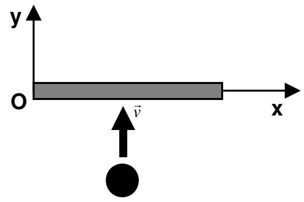
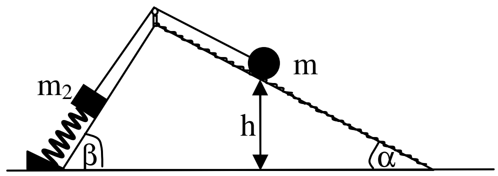
FISICA GENERALE T-A, cdl Ingegneria Energetica 4 luglio 2011, prof. r. spighi

1) Un sistema fisico è composto da una sbarra ed un proiettile puntiforme**.** La sbarra, inizialmente a riposo, giace su un piano orizzontale liscio xy ed è incernierata ad esso nel punto O. La sbarra è costituita di materiale omogeneo, ha sezione infinitesima, massa M=1 kg, lunghezza L=1 m. Il proiettile, anch'esso di massa M, si muove sul piano xy con una velocità v=1 m/s perpendicolare alla sbarra (vedi figura) rimanendone attaccato nel suo punto centrale: Calcolare:



a) il vettore velocità angolare ω del sistema dopo l'urto;
b) il modulo della reazione del vincolo;
c) la perdita di energia del sistema a causa dell'urto.

2) Un sistema è composto da un disco omogeneo di massa $m = 1\,kg$ e raggio R e da un oggetto puntiforme di massa $m_2 = 1\,kg$ collegati tra loro da una corda inestensibile e di massa trascurabile. Il disco e la massa m_2 giacciono rispettivamente su di un piano scabro inclinato di un angolo $\alpha = 30^\circ$ con coefficiente di attrito statico $\mu_S = 0.2$ e su di un piano liscio inclinato di $\beta = 60^\circ$. Il disco si trova ad una altezza $h = 1\,m$ rispetto all'orizzontale, mentre la massa m_2 comprime una molla di costante elastica $k = 20\,N/m$, lunghezza a riposo d e massa trascurabile, posta lungo il piano inclinato (vedi figura). Nell'ipotesi che il sistema sia in condizioni statiche, determinare:



a) la compressione Δl della molla;

Ad un certo istante la fune viene tagliata, determinare:

b) la compressione massima $\Delta l'$ della molla;
c) la velocità del disco quando raggiunge il piano orizzontale.

3) Un corpo di massa $m = 1\,kg$ è soggetto all'azione di 3 forze: $\vec{F}_1 = A\left(xyz - x^2y\right)\hat{\imath} + B\left(z - y\right)\hat{\jmath} + C\left(-xy + xz\right)\hat{k}$, $\vec{F}_2 = -2Axyz\hat{\imath} + 2Bz\hat{\jmath} + 3Cxy\hat{k}$ ed $\vec{F}_3 = A\left(xyz + x^2y\right)\hat{\imath} + By\hat{\jmath} - C\left(3xy + xz\right)\hat{k}$ dove x, y, z sono le coordinate cartesiane ed $A = 1\,N/m^3$, $B = 2\,N/m$ e $C = 3\,N/m^2$. Determinare:

a) il vettore accelerazione cui è soggetto il corpo in un generico punto x, y, z;

Se ad un istante il corpo è in $P(1,1,1)$ ed ha velocità $\vec{v} = v_0\left(\hat{\imath} + \hat{\jmath}\right)$ con v_0 costante positiva, determinare:

b) il vettore accelerazione tangenziale nel punto P;
c) il raggio di curvatura della traiettoria nel punto P.

4) Dato il campo di forze $\vec{F}(x, y, z) = 2x(Ay^2 + Cz^2)\hat{\imath} + 2y(Ax^2 + Bz^2)\hat{\jmath} + 2z(By^2 + Cx^2)\hat{k}$ determinare:

a) le dimensioni fisiche delle costanti *A, B e C;*
b) stabilire se il campo è conservativo e nel caso calcolarne l'energia potenziale in un punto P(x.y.z);
c) il lavoro compiuto dalla forza quando sposta il punto di applicazione da P(1,1,1) a Q(2,2,2).

5) Un disco di raggio R ruota con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega_0\hat{k}$ attorno all'asse verticale passante per il suo centro O; all'istante $t = t^*$ il disco inizia a ruotare con accelerazione angolare $\vec{\alpha} = \alpha_0\hat{k}$ dove ω_0 e α_0 sono costanti positive. Nell'ipotesi che un punto materiale di massa $m = 1\,kg$ sia fissato sul disco nel punto $\vec{P}(x, y, z) = R\left(0.5, 0, 0\right)$, determinare il vettore

a) risultante delle forze fittizie agenti sul punto materiale al tempo $t < t^*$.
b) risultante delle forze fittizie agenti sul punto materiale al tempo $t > t^*$.

6) Definire il lavoro di una forza e discutere il caso delle forze conservative.

I momenti d'inerzia di un disco di raggio *r* e di una sbarra lunga *l* rispetto ai loro cm sono $mr^2/2$ e $ml^2/12$

Soluzioni compito

Esercizio 1:
Sul sistema agiscono 5 forze: le 2 forze peso della sbarra e del proiettile, le due reazioni vincolari del piano sui due oggetti e la reazione vincolare sul cardine. Le prime 4 forze hanno somma vettoriale nulla e dunque l'unica forza che agisce sul sistema è la reazione vincolare sul cardine. Questa forza agendo sul punto 0 ha un momento della forza nullo rispetto ad 0 dunque il momento angolare (sempre calcolato rispetto ad 0) si conserva. Applicando la conservazione di $\vec{K}$, si giunge alla soluzione nel modo seguente:

1) $\vec{K}_{in} = \vec{K}_{Fin}$ dove $\vec{K}_{in} = M\vec{r} \times \vec{v} = M\dfrac{L}{2}|v|\hat{z}$ e $\vec{K}_{Fin} = I_{Syst}\vec{\omega}$ con I_S momento d'Inerzia del sistema rispetto al punto O. Sia $\vec{K}_{in}$ che $\vec{K}_{Fin}$ sono diretti lungo l'asse z (perpendicolare al foglio puntante verso l'alto).

I_{Syst} è dato da: $I_{Syst} = I_{Sbarra} + I_{proiettile}$

dove:

$$I_{Sbarra} = \int_0^L x^2 dm = \lambda \int_0^L x^2 dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \lambda \frac{L^3}{3} = \frac{M}{L}\frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}$$ dove $dm = \lambda dx$ e dunque $M = \lambda L$.

Si poteva arrivare allo stesso risultato sapendo il momento di inerzia della sbarra rispetto al suo centro di massa (che corrisponde al punto centrale) $I_{Sbarra,CM} = \dfrac{1}{12}ML^2$ ed applicando poi il teorema di Huygens-Steiner $I_O = I_{Sbarra,CM} + M\left(\dfrac{L}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{12}ML^2 + \dfrac{1}{4}ML^2 = \dfrac{1}{3}ML^2$

E

$$I_{proiettile} = M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{4}$$

$$I_{Syst} = \frac{ML^2}{3} + \frac{ML^2}{4} = \frac{7}{12}ML^2$$

Dunque da $\vec{K}_{in} = \vec{K}_{Fin}$ si ottiene $\omega = \dfrac{M}{I_{Syst}}\dfrac{L}{2}v = \dfrac{M}{\frac{7ML^2}{12}}\dfrac{L}{2}v = \dfrac{6}{7}\dfrac{v}{L} = \dfrac{6}{7} = 0.86\, rad/s$ diretto lungo z verso l'alto.

Siccome $\vec{\omega}$ è un vettore costante, questo è un moto circolare uniforme.

<u>Errore da non fare</u>: il sistema non è isolato (c'è la forza sul cardine) dunque non si può conservare la quantità di moto del sistema; si conserva invece il momento della quantità di moto del sistema perchè rispetto al punto O, la risultante del momento delle forze (vi è una sola forza, quella sul cardine) è nullo (ricordare la seconda equazione cardinale della meccanica). Quando si ha una forza vincolare (come quella del cardine), non si conosce a priori il suo valore e dunque non si può usare il teorema dell'impulso (che dice che se la forza è finita ed agisce per un tempo infinitesimo, la quantità di moto del sistema si cconserva) perchè nell'istante in cui agisce può avere valore infinito.

<u>Errore da non fare</u>: l'urto tra il proiettile e la sbarra è anelastico dunque non si può imporre la conservazione nè dell'energia cinetica del sistema, tantomeno quella dell'energia meccanica.

2) La reazione vincolare sul cardine è l'unica forza agente sul sistema dunque:

$$\left|R\right|_{cardine} = M_{syst}\left|\vec{a}_{cm}\right| = M_{syst}\omega^2 r_{cm} = (M+M)\frac{36}{49}\frac{v^2}{L^2}\frac{L}{2} = \frac{36}{49}\frac{Mv^2}{L} = \frac{36}{49} = 0.73\,N$$

3) Essendo un urto anelastico vi è una perdita di energia tra l'istante prima dell'urto e dopo l'urto.

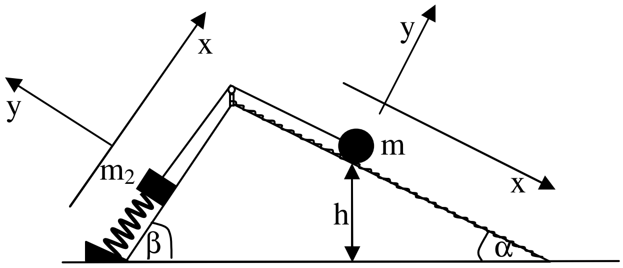
$$E_{in} = \frac{1}{2}Mv^2$$

$$E_{fin} = \frac{1}{2}I_{syst}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{7}{12}ML^2\frac{36}{49}\frac{v^2}{L^2} = \frac{3}{14}Mv^2 = \frac{3}{14}\ joule$$

$$\Delta E = E_{fin} - E_{in} = \frac{3}{14}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv^2 = -\frac{2}{7}Mv^2 = -0.29\ joule$$

Esercizio 2

a)
La soluzione si ottiene imponendo che la sommatoria delle forze per il disco e per la massa m_2 (non importa scriverla per la corda e la molla in quanto hanno massa trascurabile) sia nulla. Scegliamo un sistema di riferimento con l'asse x diretto come la direzione di un eventuale moto del sistema (coincidente con la direzione del piano inclinato) e l'asse y perpendicolarmente (vedi figura). Rispetto a questo sistema di riferimento, la sommatoria delle forze risulta:



per il disco:

$$\begin{cases} -T - F_A + mgsin(\alpha) = 0 \\ R_D - mg\cos(\alpha) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -T - \mu_s mg\cos(\alpha) + mgsin(\alpha) = 0 \\ R_D = mg\cos(\alpha) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T = mg\left(sin(\alpha) - \mu_s\cos(\alpha)\right) \\ R_D = mg\cos(\alpha) \end{cases}$$

per la massa m_2:

$$\begin{cases} T + k\Delta l - m_2 gsin(\beta) = 0 \\ R_{m2} - m_2 g\cos(\beta) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k\Delta l = m_2 gsin(\beta) - T \\ R_{m2} = m_2 g\cos(\beta) \end{cases}$$

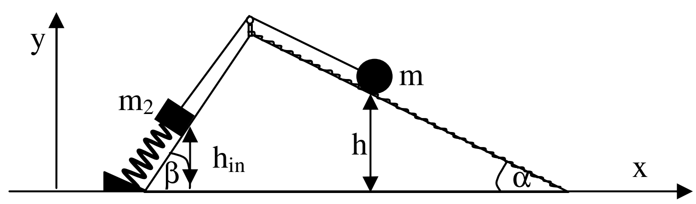
Essendo la corda sempre la stessa, la tensione T che compare nelle equazioni relative al disco ed alla massa m_2 è la stessa: sostituendo dunque T dall'equazione del disco in quella della massa si ottiene:

$$\Delta l = \frac{g\left[m_2 sin(\beta) - m\left(sin(\alpha) - \mu_s\cos(\alpha)\right)\right]}{k}$$ sostituendo i valori numerici $\Delta l = 26.4\,cm$

b) Studiamo il sistema formato dal corpo m_2 e dalla molla. Prima che la corda venga tagliata, sulla massa m_2 agiscono la forza peso, la forza della molla, la tensione del filo e la reazione vincolare del piano inclinato: le prime tre forze sono conservative, mentre la quarta non compie lavoro: Dopo che la corda è stata tagliata, sulla massa m_2 agiscono la forza peso, la forza della molla e la reazione del piano inclinato: le prime due forze sono conservative, mentre la terza non compie lavoro. Non ha senso considerare le forze che agiscono sulla molla in quanto ha massa trascurabile. Visto che le forze che compiono lavoro sono tutte conservative, possiamo applicare la conservazione dell'energia. Prendendo come sistema di riferimento l'asse orizzontale (ed uno verticale perpendicolare al primo) abbiamo:

$$E_{in} = E_{fin}$$

dove per istante iniziale prendiamo quello in cui la corda non è ancora stata tagliata e per istante finale quello dopo



che la corda è stata tagliata e la molla è nella massima compressione:

$E_{in} = m_2 g h_{in} + \frac{1}{2} k(\Delta l)^2$ dove h_{in} è l'altezza rispetto all'orizzontale della massa m_2, data da $h_{in} = (d - \Delta l)\sin(\beta)$

Dopo che la corda viene tagliata, la massa m_2 comprime ulteriormente la molla e si ottiene:

$E_{fin} = m_2 g h_{fin} + \frac{1}{2} k(\Delta l')^2$ dove h_{fin} è l'altezza rispetto all'orizzontale della massa m_2, data da $h_{fin} = (d - \Delta l')\sin(\beta)$. Dunque imponendo la conservazione dell'energia si ottiene:

$m_2 g h_{in} + \frac{1}{2} k(\Delta l)^2 = m_2 g h_{fin} + \frac{1}{2} k(\Delta l')^2$ da cui sostituendo i valori di h_{in} e h_{fin} si ottiene

$$m_2 g(d - \Delta l)\sin(\beta) + \frac{1}{2} k(\Delta l)^2 = m_2 g(d - \Delta l')\sin(\beta) + \frac{1}{2} k(\Delta l')^2$$

Semplificando il primo termine di ogni membro che risulta uguale si ottiene:

$-m_2 g \Delta l \sin(\beta) + \frac{1}{2} k(\Delta l)^2 = -m_2 g \Delta l' \sin(\beta) + \frac{1}{2} k(\Delta l')^2$ che come atteso risulta indipendente dalla lunghezza a riposo della molla. È un'equazione di secondo grado in $\Delta l'$ che in generale ha 2 soluzioni corrispondenti ai casi in cui l'energia cinetica è nulla e prima di risolverla analiticamente si può già notare che una soluzione è $\Delta l' = \Delta l = 26.4\,cm$ (la compressione del punto a) infatti i 2 membri sono uguali se si sostituisce $\Delta l'$ con Δl. Comunque sostituendo i valori si ottiene: $\Delta l' = 26.4\,cm$ e $\Delta l' = 58.5\,cm$ dove la soluzione corretta è la seconda (come atteso la compressione è maggiore).

Non essendoci attrito su questo piano inclinato, il moto della massa m_2 sarà armonico, cioè la massa m_2 continuerà ad oscillare in eterno sotto l'azione simultanea della forza di gravità e della forza della molla.

Errore da non fare: si può essere indotti a pensare che il punto di massima compressione della molla (dove la massa m_2 è ferma) si possa ottenere imponendo che la forza gravitazionale (lungo il piano inclinato) debba eguagliare la forza della molla (cioè considerare il sistema come in equilibrio ed imporre che la sommatoria delle forze sia uguale a zero):

$$-m_2 g \sin(\beta) + k(d + \Delta l) = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta l = \frac{m_2 g \sin(\beta) - d}{k}$$

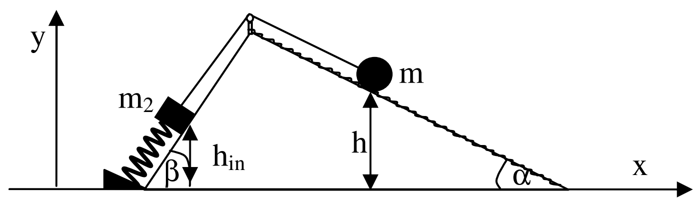
Questo è errato in quanto pur essendo la massa m_2 ferma nel punto di massima compressione della molla non ha accelerazione nulla (anzi in quel punto l'accelerazione è massima in quanto si tratta di un moto armonico) e non può essere considerato un punto di equilibrio (nè stabile, nè instabile), perché un punto di equilibrio lo si ha quando un oggetto sta fermo per sempre (Primo principio della dinamica).

c)

Una volta tagliata la corda, il disco, a causa dell'attrito statico, rotola senza strisciare fino al piano inclinato orizzontale. E' possibile applicare la conservazione dell'energia in quanto l'unica forza applicata al disco che compie lavoro è la forza peso che è conservativa, mentre la forza di attrito statico e la reazione vincolare non compiono lavoro. Prendendo come sistema di riferimento l'asse orizzontale (ed uno verticale perpendicolare al primo) abbiamo:

$E_{in} = E_{fin}$

dove per istante iniziale prendiamo quello in cui la corda non è ancora stata tagliata e per istante finale quello dopo aver tagliato la corda quando il disco si trova sul piano orizzontale.



$E_{in} = mg(h + R)$ dove $h + R$ è l'altezza rispetto all'orizzontale del baricentro del disco.

Dopo che la corda viene tagliata, il disco rotola senza strisciare fino al piano orizzontale con un'energia:

$$E_{fin} = mgR + T_{CM} + \frac{1}{2}mV^2{}_{CM} = mgR + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}mV^2{}_{CM} = mgR + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\frac{V^2{}_{CM}}{R^2} + \frac{1}{2}mV^2{}_{CM} = mgR + \frac{3}{4}mV^2{}_{CM}$$

quindi $mg(h+R) = mgR + \frac{3}{4}mV^2{}_{CM}$ da cui $V_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 3.6\, m/s$

Esercizio 3

a)

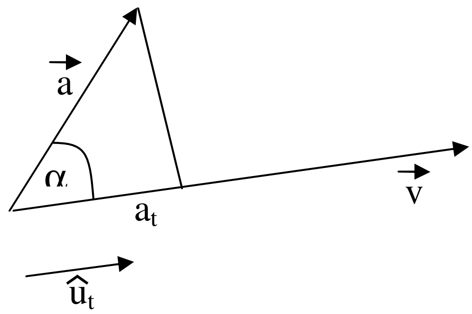
La risultante $\vec{F}$ delle forze agente sul corpo di massa m si ottiene facendo la somma vettoriale delle 3 forze e si ottiene: $\vec{F} = 3Bz\hat{j} - Cxy\hat{k}$. A questo punto è sufficiente dividere per la massa del corpo per ottenere il vettore accelerazione cui esso è soggetto in un generico punto x, y, z:

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\left(3Bz\hat{j} - Cxy\hat{k}\right) = 6z\hat{j} - 3xy\hat{k}$$

b)

In generale il vettore accelerazione $\vec{a}$ può essere scomposto nella sua componente tangenziale $\vec{a}_t$ ed in quella normale $\vec{a}_n$ (detta anche centripeta):

$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$.



Possiamo scrivere il vettore $\vec{a}_t$ come: $\vec{a}_t = a_t\hat{u}_t$ dove lo scalare a_t è il module del vettore $\vec{a}_t$ ed $\hat{u}_t$ è il versore tangente alla traiettoria (vedi figura). Otteniamo il modulo del vettore $\vec{a}_t$ dal prodotto scalare tra i vettori accelerazione $\vec{a}$ e velocità $\vec{v}$: $\vec{a} \bullet \vec{v} = |\vec{a}||\vec{v}|\cos\alpha$ dove α è l'angolo tra i 2 vettori, da cui segue $a_t = |\vec{a}|\cos\alpha = \frac{\vec{a} \bullet \vec{v}}{|\vec{v}|}$. Il versore $\hat{u}_t$ è dato dal vettore velocità diviso il suo modulo: $\hat{u}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

Dunque il vettore accelerazione tangenziale è dato da:

$$\vec{a}_t = a_t\hat{u}_t = \left(\frac{\vec{a} \bullet \vec{v}}{|\vec{v}|}\right)\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{\vec{a} \bullet \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v}.$$

Per determinare $\vec{a}_t$ è necessario innanzitutto calcolare il vettore $\vec{a}$ nel punto P(1,1,1) e dopo svolgere l'espressione sopra scritta:

$\vec{a}(1,1,1) = \frac{1}{m}\left(3B\hat{j} - C\hat{k}\right)$ mentre la velocità $\vec{v} = v_0\left(\hat{i} + \hat{j}\right)$ è già data nel punto considerato

$$\vec{a} \bullet \vec{v} = \frac{1}{m}\left(3B\hat{j} - C\hat{k}\right) \bullet v_0\left(\hat{i} + \hat{j}\right) = \frac{3Bv_0}{m}$$

$$|\vec{v}|^2 = \vec{v} \bullet \vec{v} = v_0\left(\hat{i} + \hat{j}\right) \bullet v_0\left(\hat{i} + \hat{j}\right) = v_0^{\,2}(1+1) = 2v_0^{\,2}$$

A questo punto $\vec{a}_t = \left(\frac{\vec{a} \bullet \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v} = \left(\frac{\frac{3Bv_0}{m}}{2{v_0}^2}\right)\vec{v} = \left(\frac{3Bv_0}{2m{v_0}^2}\right)v_0\left(\hat{i}+\hat{j}\right) = \left(\frac{3B}{2m}\right)\left(\hat{i}+\hat{j}\right) = 3\left(\hat{i}+\hat{j}\right)$

Da notare, come ci si aspettava, che $\vec{a}_t$ ha la stessa direzione di $\vec{v}$ essendo la velocità tangente alla traiettoria.

c)

Il raggio di curvatura ρ si ottiene dalla relazione $|\vec{a}_n| = \frac{|\vec{v}|^2}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{a}_n|}$ dove $|\vec{v}|^2$ è già stato valutato precedentemente. Invertendo la relazione $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$ possiamo ottenere il vettore accelerazione normale $\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t$ che risulta

$$\vec{a}_n = \frac{1}{m}\left(3B\hat{j} - C\hat{k}\right) - \left(\frac{3B}{2m}\right)\left(\hat{i}+\hat{j}\right) = \frac{1}{m}\left(-\frac{3B}{2}\hat{i} + \left(3B - \frac{3B}{2}\right)\hat{j} - C\hat{k}\right) = \frac{1}{m}\left(-\frac{3B}{2}\hat{i} + \frac{3B}{2}\hat{j} - C\hat{k}\right).$$

Per essere sicuri di non avere fatto errori di calcolo, è importante verificare che i vettori $\vec{a}_n$ ed $\vec{a}_t$ siano perpendicolari, controllando ad esempio che il prodotto scalare tra loro sia nullo:

$$P_{scal} = \vec{a}_n \bullet \vec{a}_t = \frac{1}{m}\left(-\frac{3B}{2}\hat{i} + \frac{3B}{2}\hat{j} - C\hat{k}\right) \bullet \left(\frac{3B}{2m}\right)\left(\hat{i}+\hat{j}\right) = \frac{1}{4m^2}\left(-9B^2 + 9B^2\right) = 0 \text{ cvd.}$$

Il modulo dell'accelerazione normale $|\vec{a}_n|$ è dato da

$$|\vec{a}_n| = \sqrt{\vec{a}_n \bullet \vec{a}_n} = \sqrt{\frac{1}{m}\left(-\frac{3B}{2}\hat{i} + \frac{3B}{2}\hat{j} - C\hat{k}\right) \bullet \frac{1}{m}\left(-\frac{3B}{2}\hat{i} + \frac{3B}{2}\hat{j} - C\hat{k}\right)} = \frac{1}{m}\sqrt{\left(\frac{9B^2}{4} + \frac{9B^2}{4} + C^2\right)} = \frac{1}{m}\sqrt{\left(\frac{9B^2}{2} + C^2\right)}$$

A questo punto il raggio di curvatura ρ è dato da $\rho = \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{a}_n|} = \frac{2{v_0}^2}{\frac{1}{m}\sqrt{\left(\frac{9B^2}{2} + C^2\right)}} = \frac{2{v_0}^2 m}{\sqrt{\left(\frac{9B^2}{2} + C^2\right)}} = \frac{2{v_0}^2}{\sqrt{27}}$

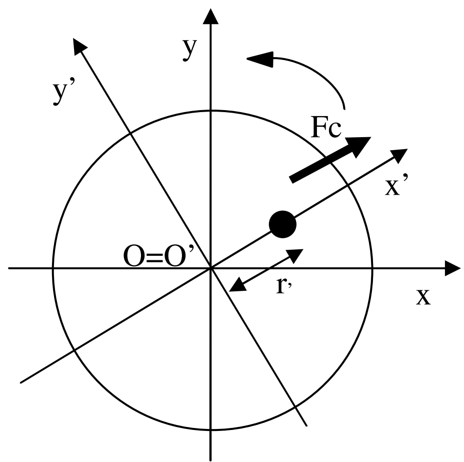
Esercizio 4

Le costanti A, B e C hanno dimensioni fisiche fondamentali $[ML^{-2}T^{-2}]$ e unità di misura N/m^3 oppure Kg/m^2s^2.

Il rotore del campo è nullo, dunque il campo è conservativo. Calcolando il lavoro su un cammino rettilineo a tratti tra l'origine O(0,0,0) ed un punto generico C(*x,y,z*) si ottiene l'energia potenziale $V = -Ax^2y^2 - By^2z^2 - Cx^2z^2$.

Il lavoro tra i punti P(1,1,1) e Q(2,2,2) si ottiene dalla relazione:

$$L_{PQ} = V(P) - V(Q) = 15\left(A+B+C\right)$$



Esercizio 5

a)

Il disco sta ruotando in senso antiorario (ω_0 è positivo) con una velocità angolare costante (vedi figura). Rispetto al sistema di riferimento non inerziale O'x'y'z' con origine nel centro del disco e solidale ad esso (cioè in rotazione con velocità angolare) le forze fittizie agenti sul corpo di massa m sono:

$$\vec{F}_{fittizie} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' - ma_{oo'}$$

dove si può facilmente notare che l'unica forza non nulla è la forza centrifuga $\vec{F}_{centrifuga} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$. Si può subito comprendere che la forza centrifuga è diretta lungo l'asse $\hat{i}'$ con verso positivo (vedi figura) e modulo (essendo $\vec{\omega}$ ed $\vec{r}'$ perpendicolari) $|\vec{F}_{centrifuga}| = m\frac{R}{2}\omega_0{}^2\hat{i}'$. Nel caso in cui si vogliano fare tutti i passaggi per la determinazione della forza centrifuga, la procedura è la seguente:

$$\vec{F}_{centrifuga} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = -m\vec{\omega}\times\begin{pmatrix}\hat{i}' & \hat{j}' & \hat{k}' \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ \frac{R}{2} & 0 & 0\end{pmatrix} = -m\vec{\omega}\times\frac{R}{2}\omega_0\hat{j}' = -m\begin{pmatrix}\hat{i}' & \hat{j}' & \hat{k}' \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ 0 & \frac{R}{2}\omega_0 & 0\end{pmatrix} = m\frac{R}{2}\omega_0{}^2\hat{i}'$$

b) Il disco sta ruotando in senso antiorario con una velocità angolare sempre crescente (α_0 costante positiva) . Rispetto al sistema di riferimento non inerziale O'x'y'z' con origine nel centro del disco e solidale ad esso (cioè in rotazione con velocità angolare) le forze fittizie agenti sul corpo di massa m sono:

$$\vec{F}_{fittizie} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' - ma_{oo'}$$

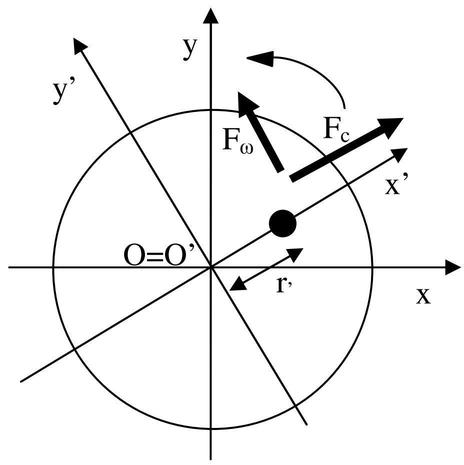
dove le forze non nulle sono:

$$\vec{F}_{fittizie} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'$$

cioè alla forza centrifuga (primo termine) si è aggiunta anche la forza derivante dalla non uniformità del modulo della velocità angolare. E' importante precisare che il contributo della forza centrifuga non è uguale al caso precedente in quanto la velocità angolare $\vec{\omega}$ non è più costante, ma è data da

$$\vec{\omega} = \omega_o\hat{k} + \alpha_o t\hat{k} = (\omega_o + \alpha_o t)\hat{k}$$

dove t è un tempo maggiore di t^* ($t > t^*$). Si tratta di un moto circolare uniformemente accelerato. Valutiamo le due forze partendo da quella centrifuga:



$$\vec{F}_{centrifuga} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = -m\vec{\omega}\times\begin{pmatrix}\hat{i}' & \hat{j}' & \hat{k}' \\ 0 & 0 & \omega_0 + \alpha_0 t \\ \frac{R}{2} & 0 & 0\end{pmatrix} = -m\vec{\omega}\times\frac{R}{2}(\omega_0 + \alpha_0 t)\hat{j}' =$$

$$= -m\begin{pmatrix}\hat{i}' & \hat{j}' & \hat{k}' \\ 0 & 0 & \omega_0 + \alpha_0 t \\ 0 & \frac{R}{2}(\omega_0 + \alpha_0 t) & 0\end{pmatrix} = m\frac{R}{2}(\omega_0 + \alpha_0 t)^2\hat{i}'$$

Per valutare il contributo derivante dalla non uniformità del modulo della velocità angolare bisogna innanzitutto valutare $\dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \alpha_0 \hat{k}$ e procedere come nel caso precedente:

$$\vec{F}_{\dot{\vec{\omega}}} = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' = -m \begin{pmatrix} \hat{i}' & \hat{j}' & \hat{k}' \\ 0 & 0 & \alpha_0 \\ \frac{R}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = -m\frac{R}{2}\alpha_0 \hat{j}'$$

La raffigurazione delle 2 forze è qui nella figura qui sopra: dunque

$$\vec{F}_{fittizie} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' = m\frac{R}{2}(\omega_0 + \alpha_0 t)^2 \hat{i}' - m\frac{R}{2}\alpha_0 \hat{j}'$$