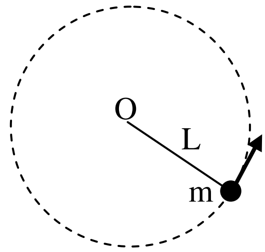
**FISICA GENERALE T-A 4 luglio 2012**

prof. roberto spighi (CdL ingegneria Energetica)

**1)** Una massa $m = 1\,kg$ è collegata ad un filo inestensibile di lunghezza $l = 1\,m$ fissato in $O$ su un piano orizzontale liscio (figura a lato). La massa, inizialmente ferma, si muove di moto circolare uniforme. Determinare, rispetto ad un sistema di riferimento solidale con la massa $m$,



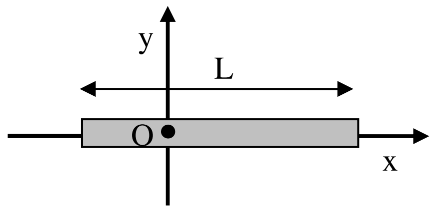

a) il vettore risultante sia delle forze reali che delle fittizie agenti sulla massa.

Il filo regge una tensione massima $T = 9\,N$ oltre la quale si spezza: determinare

b) la velocità massima consentita alla massa $m$ prima di rompere il filo.

**2)**

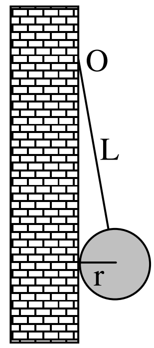
Un'asta omogenea, di massa $M = 8\,kg$ e lunghezza $L = 60\,cm$, è collocata in un piano verticale ed è libera di ruotare attorno ad un punto O posto ad $L/3$ da un suo estremo. Inizialmente l'asta è ferma in posizione orizzontale. Determinare:




a) l'accelerazione angolare dell'asta nell'istante iniziale;
b) la velocità del centro di massa quando passa per la verticale;
c) il momento angolare nella condizione del punto "b".

Il momento di inerzia di un'asta (massa M e lunghezza L) rispetto al suo cm è: $I_{ASTA} = \frac{1}{12}ML^2$

**3)** Una sfera di raggio $r = 10\,cm$ e massa $m = 1\,kg$ è attaccata ad una corda lunga $L = 50\,cm$ di massa trascurabile fissata a sua volta ad un chiodo su una parete (figura a lato). Si determini:




a) la tensione della corda;
b) la forza (modulo, direzione e verso) esercitata dalla parete sulla sfera.

Ad un certo istante la sfera viene spostata (tenendo la corda tesa) fino a formare con la parete un angolo di 60°, per poi essere fatta cadere fino a colpire la parete, calcolare:

c) il momento angolare della sfera quando urta la parete rispetto ad un asse passante per O.

Il momento di inerzia di una sfera (massa M e raggio R) rispetto al suo cm è: $I_{sfera} = \frac{2}{5}MR^2$

**4)** Dato il campo di forze $\vec{F}(x, y, z) = \alpha y\hat{i} + \beta x\hat{j} + \alpha z\hat{k}$ determinare:

a) le dimensioni fisiche delle costanti α e β;
b) per quali valori delle costanti α e β il campo di forze è conservativo e calcolarne in quei casi l'energia potenziale;
c) determinare il lavoro compiuto dalla forza conservativa con $\alpha = 4$ (nelle sue opportune unità di misura) quando sposta il suo punto di applicazione da A di coordinate (0,4,1) a B di coordinate (2,1,2).

**5)** Un disco con velocità angolare iniziale 2rad/s compie 40 giri per rallentare fino al completo arresto. Si assuma che il moto sia ad accelerazione angolare costante. Si calcoli:

a) il tempo di arresto;
b) l'accelerazione angolare;
c) il tempo in cui il disco compie la prima metà dei 40 giri.

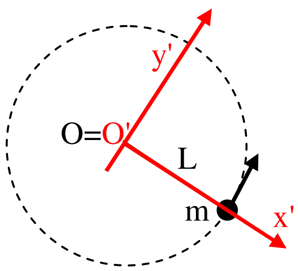
**6)** Enunciare e discutere il teorema dell'impulso.

# Soluzioni compito:

# Esercizio 1:

## a)

Prendiamo un sistema di riferimento (SdR) centrato in O, con l'asse $x'$ sul piano del moto e che segue la pallina, l'asse $y'$ sempre sul piano del moto e perpendicolare ad $x'$ e l'asse $z'$ perpendicolare al piano del moto verso l'alto (vedi figura). Rispetto a questo SdR la pallina è ferma e dunque $\sum \vec{F} = 0$; scriviamo tutte le possibili forze agenti sulla pallina




$\vec{F}' = \vec{F}_{reali} + \vec{F}_{fitt}$ dove

$\vec{F}_{reali} = -mg\hat{k}' + R\hat{k}' + T\hat{x}' = T\hat{x}'$ sono le forze reali in cui il primo contributo è la forza peso, il secondo la reazione vincolare del piano orizzontale (che danno risultante nulla) ed il terzo la tensione del filo (che funge da forza centripeta)

$$\vec{F}_{fitt} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' - ma_{oo'} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = m\frac{v^2}{L}\hat{x}'$$

sono le forze fittizie in cui l'unico termine non nullo è la forza centrifuga diretta lungo l'asse $x'$.

Essendo $\sum \vec{F} = 0$ si deduce che $\begin{cases} x' \\ y' \\ z' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -T + m\dfrac{v^2}{L} = 0 \\ 0 = 0 \\ R - mg = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T = m\dfrac{v^2}{L} \\ 0 = 0 \\ R = mg \end{cases}$

## b)

La velocità massima consentita alla massa $m$ è quella che si ottiene con la Tensione massima sostenibile dal filo. Dall'equazione lungo l'asse $x'$ si ottiene → $T_{max} = m\dfrac{v^2_{max}}{L} \rightarrow v_{max} = \sqrt{\dfrac{T_{max}L}{m}} = 3\,m/s$

# Esercizio 2:

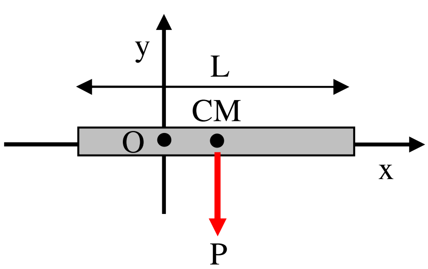
## a)

Applicando la seconda equazione cardinale della meccanica si ottiene che

$\vec{M}_O = I_O\vec{\alpha}$ dove le quantità sono calcolate rispetto al punto O.

$$\vec{d}_{O-CM} = \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3}\right)\hat{i} = \frac{L}{6}\hat{i}$$

$$I_O = I_{CM} + Md^2{}_{O-CM} = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}ML^2$$



$$\vec{M}_O = \vec{d}_{O-CM} \times M\vec{g} = \frac{L}{6}\hat{i} \times \left(-Mg\hat{j}\right) = -\frac{L}{6}Mg\hat{k}$$

dunque da $\quad \vec{M}_O = I_O\vec{\alpha} \;\rightarrow\; \vec{\alpha} = \dfrac{-\frac{L}{6}Mg\hat{k}}{\frac{1}{9}ML^2} = -\dfrac{3}{2}\dfrac{g}{L}\hat{k} = -24.5\hat{k}\; rad/s^2$

# b)

Dato che tutte le forze sono conservative (assumiamo il vincolo ideale), applichiamo la conservazione dell'energia. L'energia iniziale è pari alla sola energia potenziale in quanto il sistema è fermo. Scegliendo come zero del potenziale l'asse x della figura otteniamo:

$$E_i = 0$$

$$E_f = -Mgh + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^{\;2} = -Mg\frac{L}{6} + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ML^2\left(\frac{v_{CM}}{\frac{L}{6}}\right)^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^{\;2} =$$

$$= -Mg\frac{L}{6} + \frac{3}{2}Mv_{CM}^{\;2} + \frac{1}{2}Mv_{CM}^{\;2} = -Mg\frac{L}{6} + 2Mv_{CM}^{\;2}$$

Dunque $E_i = E_f \;\rightarrow\; 0 = -Mg\dfrac{L}{6} + 2Mv_{CM}^{\;2} \;\rightarrow\; v_{CM} = \sqrt{\dfrac{gL}{12}} = 0.70\; m/s$

Ovviamente la soluzione poteva anche essere ottenuta calcolando

$$E_f = -Mgh + \frac{1}{2}I_O\omega^2 = -Mg\frac{L}{6} + \frac{1}{2}\frac{1}{9}ML^2\omega^2 =$$

$$-Mg\frac{L}{6} + \frac{1}{2}\frac{1}{9}ML^2\left(\frac{v_{cm}}{d_{o-cm}}\right)^2 = -Mg\frac{L}{6} + \frac{1}{2}\frac{1}{9}ML^2\left(\frac{v_{cm}}{\frac{L}{6}}\right)^2$$

$$E_i = E_f \;\rightarrow\; -Mg\frac{L}{6} + \frac{1}{2}\frac{1}{9}ML^2\left(\frac{v_{cm}}{\frac{L}{6}}\right)^2 = 0 \;\rightarrow\; v_{cm} = 0.7\; m/s$$

# c)

Il momento angolare nella posizione verticale è dato da:

$\vec{K}_O = I_O\vec{\omega}$ dove

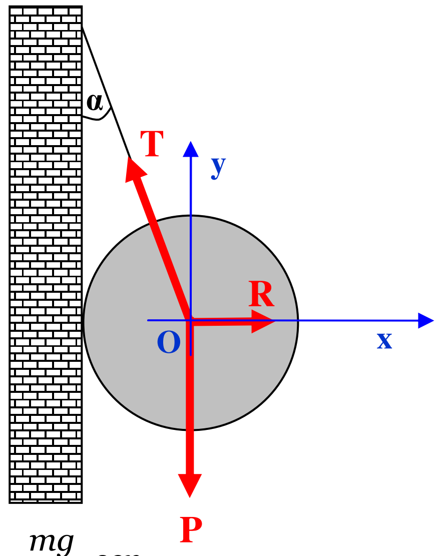
$I_O = \dfrac{1}{9}ML^2$ come già calcolato e

$\vec{\omega} = -\dfrac{v_{cm}}{d_{O-CM}}\hat{k} = -\dfrac{\sqrt{\frac{gL}{12}}}{\frac{L}{6}}\hat{k} = -\sqrt{\dfrac{3g}{L}}\hat{k}$ dunque

$$\vec{K}_O = I_O\vec{\omega} = -\frac{1}{9}ML^2\sqrt{\frac{3g}{L}}\hat{k} = -ML\sqrt{\frac{gL}{27}}\hat{k} = -2.24\hat{k}\; kgm^2s^{-1}$$

# Esercizio 3:

## a,b)




Chiaramente la sfera è ferma dunque la $\sum \vec{F} = \vec{F}_{tot} = 0$. Sulla sfera agiscono 3 forze: il peso $\vec{P} = m\vec{g}$, la tensione della corda $\vec{T}$ e la reazione vincolare della parete $\vec{R}$ →

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = 0$.

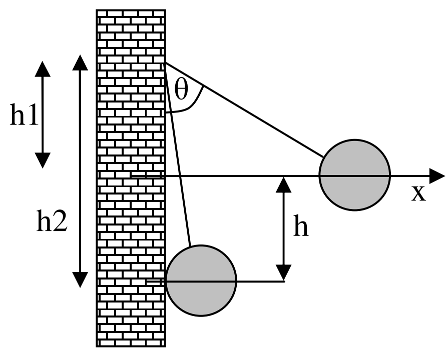
Scegliamo un sistema di riferimento (SdR) come mostrato in figura. Innanzitutto vediamo che l'angolo $\alpha$ può essere determinato nel seguente modo:

$$(L+r)\sin\alpha = r \quad \rightarrow \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{r}{L+r}\right) = 9.6^\circ$$

Scriviamo l'equazione $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = 0$ lungo le coordinate $x$ ed $y$:

$$\begin{cases} x \\ y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R - T_x = 0 \\ T_y - P = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R - Tsen\alpha = 0 \\ T\cos\alpha - mg = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R = Tsen\alpha \\ T\cos\alpha = mg \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R = \dfrac{mg}{\cos\alpha} sen\alpha \\ T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R = 1.66\ N \\ T = 9.95\ N \end{cases}$$

## c)




Possiamo applicare la conservazione dell'energia tra l'istante iniziale (sfera ferma ad un angolo $\theta = 60^\circ$) e istante finale (sfera che colpisce la parete). Come linea di base per il calcolo dell'energia potenziale scegliamo quella mostrata in figura dall'asse x dunque:

$E_{ini} = 0$

mentre per l'istante finale abbiamo:

$E_{fin} = -mgh + \frac{1}{2}mv^2$ con

$$|h| = h_2 - h_1 = (L+r)\cos\alpha - (L+r)\cos\theta = (L+r)(\cos\alpha - \cos\theta) = 0.29\ m$$

Da cui si ricava la velocità:

$$E_{fin} = E_{in} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g(L+r)(\cos\alpha - \cos\theta)} = 2.39\ m/s$$

Il momento angolare della sfera nell'istante in cui tocca la parete è dato da:

$\vec{K} = I_O\vec{\omega}$ dove

$$I_O = I_{cm} + m(L+r)^2 = \frac{2}{5}mr^2 + m(L+r)^2 \qquad \text{e} \qquad \vec{\omega} = -\left|\frac{v}{L+r}\right|\hat{k} \quad \text{dunque}$$

$$\vec{K} = I_O\vec{\omega} = -\left(\frac{2}{5}mr^2 + m(L+r)^2\right)\left|\frac{v}{L+r}\right|\hat{k} = 1.45\ kgm^2/s^2$$

# Esercizio 4

# a)

Le costante $\alpha$ e $\beta$ hanno le seguenti dimensioni fisiche:

[α]=[β] = [F]/[L]=[M][$T^{-2}$] e unità di misura *N/m* oppure *Kg/ ($s^2$).*

# b)

Il rotore del campo è identicamente nullo nelle componenti x ed y, mentre lungo z si ottiene:

$$Rot_z = \alpha - \beta$$

dunque affinchè il campo sia conservativo occorrerà che

$$Rot_z = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha - \beta = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \beta$$

dunque il campo $\vec{F}(x,y,z) = \alpha\left(y\hat{i} + x\hat{j} + z\hat{k}\right)$ è conservativo. Calcolando il lavoro su un cammino rettilineo a tratti tra l'origine O(0,0,0) ed un punto generico C($x,y,z$)

$$L_{OP} = \int_{ooo}^{xoo} F_x\,dx + \int_{xoo}^{xyo} F_y\,dy + \int_{xyo}^{xyz} F_z\,dz =$$

$$L_{OP} = \int_{ooo}^{xoo} \alpha y\,dx + \int_{xoo}^{xyo} \alpha x\,dy + \int_{xyo}^{xyz} \alpha z\,dz =$$

$$= -[\alpha xy]_{ooo}^{xoo} + [\alpha xy]_{xoo}^{xyo} + \left[\alpha\frac{z^2}{2}\right]_{xyo}^{xyz} = 0 + \alpha xy + \alpha\frac{z^2}{2} = \alpha\left(xy + \frac{z^2}{2}\right)$$

dunque $L_{OP} = V(0,0,0) - V(x,y,z) = \alpha\left(xy + \frac{z^2}{2}\right)$

da cui segue l'energia potenziale $V(x,y,z) = -\alpha\left(xy + \frac{z^2}{2}\right)$.

# c)

Il campo è conservativo e $\alpha = 4 \rightarrow V(x,y,z) = -4\left(xy + \frac{z^2}{2}\right)$

il lavoro tra i punti A(0,4,1) e B(2,1,2) si ottiene dalla relazione:

$$L_{RS} = V(A) - V(B) = V(0,4,1) - V(2,1,2) = -4\left(\frac{1}{2}\right) + 4(2+2) = 14\ J$$

# Esercizio 5

# a,b)

Si tratta di un moto uniformemente accelerato (con accelerazione negativa) che può essere scritto per le coordinate angolari nel seguente modo:

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 - \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases} \quad \text{dove } \theta_0 = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} \omega = \omega_0 - \alpha t \\ \theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases}$$

Viene chiesto il tempo quando si arresta ($t_a$ ) e l'accelerazione angolare ($\alpha$ ) → cioè è necessario imporre $\omega = 0$ dopo 40 giri → $\theta = 40 \bullet 2\pi$ e dunque:

$$\begin{cases} \omega_0 - \alpha t_a = 0 \\ 40 \bullet 2\pi = \omega_0 t_a - \frac{1}{2}\alpha t_a^{\ 2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_0 - \alpha t_a = 0 \\ 40 \bullet 2\pi = \omega_0 t_a - \frac{1}{2}\alpha t_a^{\ 2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\omega_0^{\ 2}}{160\pi} = \frac{4}{160\pi} = \frac{1}{40\pi} = 0.008\ rad/s^2 \\ t_a = \frac{160\pi}{\omega_0} = 80\pi = 251\ s \end{cases}$$

# c)

Per calcolare il tempo in cui il disco compie i primi 20 giri si utilizzano sempre le equazioni del moto uniformemente accelerato (per le variabili angolari)

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 - \alpha t \\ \theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases} \quad \text{dove} \quad \theta = 20 \bullet 2\pi \text{ e dalla soluzione precedente } \alpha = \frac{\omega_0^{\ 2}}{160\pi} \quad \rightarrow$$

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 - \frac{\omega_0^{\ 2}}{160\pi} t \\ 20 \bullet 2\pi = \omega_0 t - \frac{1}{2}\frac{\omega_0^{\ 2}}{160\pi} t^2 \end{cases}$$

è un sistema in 2 equazioni e 2 incognite ($\theta$ e $t$ ) che risolto dà:

$$\begin{cases} t = \frac{160}{\omega_0}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \\ \omega = \omega_0 - \frac{\omega_0^{\ 2}}{160\pi}\left(\frac{160}{\omega_0}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right) \end{cases}$$

dove per il tempo bisogna prendere la soluzione che dà un valore minore del tempo di arresto $t_a$ $\rightarrow$

$$\begin{cases} t = \dfrac{160}{\omega_o}\left(1 - \sqrt{\dfrac{1}{2}}\right) = 0.29\, t_a = 73.5\, s \\ \omega = \omega_o - \dfrac{{\omega_o}^2}{160\pi}\left(\dfrac{160}{\omega_o}\left(1 - \sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)\right) = \sqrt{\dfrac{1}{2}}\omega_o \end{cases}$$