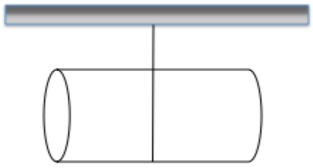
FISICA GENERALE T-A 8 Luglio 2013 prof. Spighi (CdL ingegneria Energetica)

1) La posizione di un punto materiale è $\vec{r}(t)=\frac{2}{3}t^3\hat{i}+\sqrt{3}t^2\hat{j}+3t\hat{k}$ con r in metri e t in secondi.

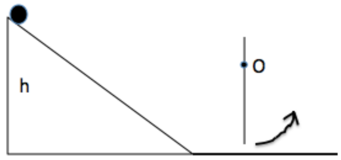
Calcolare: a) la velocità vettoriale media fra i punti $t_1 = 1s$ e $t_2 = 2s$;
b) la velocità scalare media fra gli stessi istanti di tempo;
c) il raggio di curvatura al tempo $t_3 = 0s$.

2) Un cilindro di massa M=5Kg e raggio R è appeso al soffitto mediante una corda inestensibile di massa trascurabile arrotolata esattamente a metà del cilindro. Il cilindro, inizialmente fermo e posto in posizione orizzontale con la corda perfettamente tesa, viene lasciato libero di muoversi.
Calcolare:
a) la tensione della corda durante la caduta;
b) l'accelerazione con cui cade il centro di massa.
Facoltativo: ripetere l'esercizio nel caso in cui il cilindro sia tenuto da due corde ciascuna arrotolata ad un estremo del cilindro.
(Momento d'inerzia di un cilindro di massa M e raggio R rispetto al centro di massa $I_{cm}=1/2MR^2$

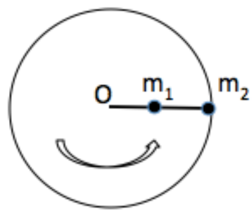


3) Dato il campo di forze $\vec{F}(x,y,z)=(-3\alpha x^2+\beta yz)\hat{i}+\beta xz\hat{j}+\beta xy\hat{k}$ determinare:
a) le dimensioni fisiche delle costanti α e β;
b) se il campo di forze è conservativo e nel caso calcolarne l'energia potenziale;
c) il lavoro fatto dalla forza quando sposta il punto di applicazione da A(1,3,-1) a S (2,2,0).

4) Un punto materiale di massa m=0,1Kg parte da fermo su un piano inclinato liscio di altezza h=1m. Alla fine del piano inclinato il punto continua a muoversi lungo un piano orizzontale liscio e urta elasticamente una sbarra inizialmente verticale lunga L=30cm e massa M=0,2Kg libera di ruotare attorno a un asse orizzontale perpendicolare alla sbarra stessa distante L/3 dall'estremità superiore della sbarra. Determinare:
a) la velocità del punto prima dell'urto;
b) la velocità del punto dopo l'urto;
c) la velocità di rotazione della sbarra.
(Momento d'inerzia di una sbarra di massa M lunghezza L rispetto al centro di massa $I_{cm}=\frac{1}{12}ML^2$)



5) Su una piattaforma, che ruota con velocità angolare ω=10rad/s in senso antiorario in un piano orizzontale attorno al suo centro O, è fissata una guida al cui interno sono poste due masse m_1=2kg e m_2=1kg tenute legate da due funi inestensibili di massa trascurabile (la prima lega il centro O alla massa 1, la seconda lega le due masse fra loro, vedi figura). Le distanze tra O e le masse sono rispettivamente R_1=R/2=5cm e R_2=R.. Sapendo che le funi rimangono tese durante il moto, calcolarne le loro tensioni.



6) Enunciare e discutere il terzo principio della dinamica.

SOLUZIONI

EX 1

a) la velocità vettoriale media si calcola tramite la formula

$$<\vec{v}_m> = \frac{\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{\left(\frac{2*8}{3}\hat{i}+4\sqrt{3}\hat{j}+6\hat{k}\right)-\left(\frac{2}{3}\hat{i}+\sqrt{3}\hat{j}+3\hat{k}\right)}{2-1} = \frac{\frac{14}{3}\hat{i}+3\sqrt{3}\hat{j}+3\hat{k}}{1} = \frac{14}{3}\hat{i}+3\sqrt{3}\hat{j}+3\hat{k}$$

b) la velocità scalare media invece si ottiene con la formula

$$<v_m> = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dove per prima cosa bisogna calcolare il valore Δs che rappresenta la lunghezza del percorso.

Sapendo che $\vec{v}(t)=\frac{d\vec{s}}{dt}$ allora $\Delta s=\int_{t_1}^{t_2}|v|dt$ con |v| modulo della velocità. Quindi:

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=2t^2\hat{i}+2\sqrt{3}t\hat{j}+3\hat{k} \Rightarrow |v| = \sqrt{(2t^2)^2+(2\sqrt{3}t)^2+3^2} = \sqrt{4t^4+12t^2+9} = \sqrt{(2t^2+3)^2} = 2t^2+3$$

$$\Delta s=\int_{t_{10}}^{t_2}|v|dt=\int_1^2(2t^2+3)dt=\left[\frac{2t^3}{3}+3t\right]_1^2=\left(\frac{2*8}{3}+6\right)-\left(\frac{2}{3}+3\right)=\frac{14}{3}+3=\frac{23}{3}m$$

Quindi

$$<v_m> = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{23}{3}}{2-1} = \frac{23}{3}m/s$$

c) per trovare il raggio di curvatura al tempo t=0s devo prima trovare la velocità e l'accelerazione al tempo t=0s. Quindi:

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=2t^2\hat{i}+2\sqrt{3}t\hat{j}+3\hat{k} \Rightarrow \vec{v}(t=0)=0\hat{i}+0\hat{j}+3\hat{k}=3\hat{k} \Rightarrow |v(t=0)|=\sqrt{9}=3m/s$$

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=4t\hat{i}+2\sqrt{3}\hat{j} \Rightarrow \vec{a}(t=0)=0\hat{i}+2\sqrt{3}\hat{j}=2\sqrt{3}\hat{j} \Rightarrow |a(t=0)|=\sqrt{4*3}=2\sqrt{3}m/s^2$$

Adesso possiamo calcolare il versore tangente alla traiettoria all'istante t=0s

$$\hat{u}_t(t=0)=\frac{\vec{v}(t=0)}{|v(t=0)|}=\frac{3\hat{k}}{\sqrt{9}}=\hat{k}$$

La componente scalare tangente dell'accelerazione la ottengo proiettando l'accelerazione vettoriale sul vettore tangente (quindi facendo il prodotto scalare):

$$a_t(t=0)=\hat{u}_t(t=0)\cdot\vec{a}(t=0)=\hat{k}\cdot 2\sqrt{3}\hat{j}=0m/s^2$$

Si nota già che essendo nulla la componente tangente al tempo t=0s dell'accelerazione, questa sarà solo normale. Facciamo comunque i calcoli.

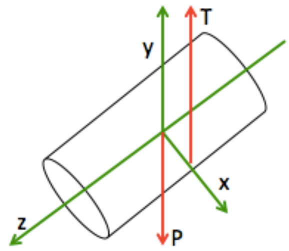
La componente normale dell'accelerazione la trovo come differenza vettoriale fra l'accelerazione totale e la componente tangente vettoriale dell'accelerazione (che si ottiene moltiplicando a_t per u_t)

$$\vec{a}(t)=\vec{a}_t(t)+\vec{a}_n(t)\Rightarrow\vec{a}_n(t)=\vec{a}(t)-\vec{a}_t(t)=(2\sqrt{3}\hat{j})-\vec{0}=2\sqrt{3}\hat{j}\Rightarrow|a_n(t=0)|=\sqrt{12}$$

Ora posso calcolare il raggio di curvatura al tempo t=0s:

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{9}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}m$$

EX 2



In figura sono segnate in rosso le forze agenti sul cilindro: il peso è applicato nel centro di massa mente la tensione è applicata tangenzialmente al bordo del cilindro. Il sistema di riferimento scelto è segnato in verde nel disegno con l'origine nel centro di massa del cilindro.

Le equazioni da impostare sono le due equazioni cardinali per un corpo rigido:

$$\vec{F}^{ext}=M\vec{a}_{cm}$$
$$\vec{M}^{ext}=I\vec{\alpha}$$

dove le forze esterne sono la tensione e il peso del cilindro, mentre per il calcolo del momento prendiamo come punto il centro di massa in modo da annullare il momento della forza peso.

$$\vec{F}^{ext}=M\vec{a}_{cm}\Rightarrow\vec{T}+\vec{P}=M\vec{a}_{cm}$$
$$\vec{M}^{ext}=I\vec{\alpha}\Rightarrow(R\hat{i}\times T\hat{j})=I\vec{\alpha}$$

Ora proietto la prima equazione in direzione z. Ricordo inoltre che il cilindro cade ruotando quindi l'accelerazione lineare a_{cm} del centro di massa è legata all'accelerazione angolare dalla relazione $a_{cm}=\alpha R$.

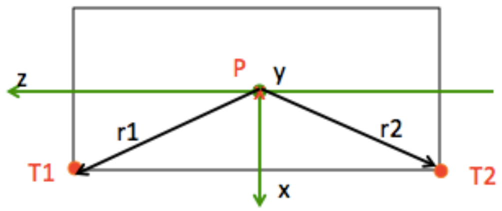
$$T-Mg=-Ma_{cm}$$
$$RT\hat{k}=I\vec{\alpha}\Rightarrow RT=I\alpha=I\frac{a_{cm}}{R}$$

Inserisco il momento d'inerzia nelle equazioni sopra e risolvo il sistema di due equazioni nelle due incognite richieste dal problema, la tensione e l'accelerazione del centro di massa:

$$\begin{cases}T-Mg=-Ma_{cm}\\ RT=\frac{1}{2}MR^2\frac{a_{cm}}{R}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}T-Mg=-Ma_{cm}\\ 2RT=MRa_{cm}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}T-Mg=-Ma_{cm}\\ T=\frac{MRa_{cm}}{2R}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{Ma_{cm}}{2}-Mg=-Ma_{cm}\\ T=\frac{Ma_{cm}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Ma_{cm}-2Mg=-2Ma_{cm}\\ T=\frac{Ma_{cm}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_{cm}=\frac{2Mg}{3M}\\ T=\frac{Ma_{cm}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_{cm}=\frac{2}{3}g=6{,}5m/s^2\\ T=16{,}3N\end{cases}$$

Facoltativo



Visto dall'alto il problema si presenta in questo modo: in verde sono segnati gli assi del sistema di riferimento (y uscente dal foglio); in rosso sono segnate le forze agenti sul cilindro (le tensioni lungo l'asse y positivo applica ai due estremi del cilindro, il peso del cilindro lungo l'asse y negativo applicato nel centro di massa); in nero sono segnati i bracci delle tensioni se prendo come polo per il calcolo dei momenti il centro di massa.
Le equazioni da impostare sono le stesse del caso precedente:

$$\vec{F}^{ext} = M\vec{a}_{cm} \Rightarrow \vec{T} + \vec{T} + \vec{P} = M\vec{a}_{cm}$$

$$\vec{M}^{ext} = I\vec{\alpha}$$

La prima equazione è banale. Consideriamo invece quella sui momenti. Notando che le tensioni delle corde sono le stesse, l'equazione si può scrivere come:

$$\vec{M}^{ext} = I\vec{\alpha} \Rightarrow (\vec{r}_1 \times T\hat{j}) + (\vec{r}_2 \times T\hat{j}) = I\vec{\alpha} \Rightarrow (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \times (T\hat{j}) = I\vec{\alpha}$$

I due bracci r1 e r2 possono essere scritti in forma vettoriale come:

$$\vec{r}_1 = R\hat{i} - \frac{L}{2}\hat{j}$$

$$\vec{r}_2 = R\hat{i} + \frac{L}{2}\hat{j}$$

Quindi la somma vettoriale corrisponde a un vettore lungo 2R in direzione delle x positive. Il momento delle forze diventa:

$$\vec{M}^{ext} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \times (T\hat{j}) = (2R\hat{i}) \times (T\hat{j}) = 2RT\hat{k} = I\vec{\alpha}$$

Unendo anche la prima equazione cardinale della dinamica otteniamo un sistema di due equazioni nelle due incognite che sono richieste:

$$T + T - Mg = -Ma_{cm}$$

$$2RT\hat{k} = I\vec{\alpha} \Rightarrow 2RT = I\alpha = I\frac{a_{cm}}{R}$$

$$\begin{cases} 2T - Mg = -Ma_{cm} \\ 2RT = \frac{1}{2}MR^2\frac{a_{cm}}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2T - Mg = -Ma_{cm} \\ 4RT = MRa_{cm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2T - Mg = -Ma_{cm} \\ T = \frac{MRa_{cm}}{4R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 * \frac{Ma_{cm}}{4} - Mg = -Ma_{cm} \\ T = \frac{Ma_{cm}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ma_{cm} - 2Mg = -2Ma_{cm} \\ T = \frac{Ma_{cm}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{cm} = \frac{2Mg}{3M} \\ T = \frac{Ma_{cm}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{cm} = \frac{2}{3}g = 6{,}5 m/s^2 \\ T = 8{,}13N \end{cases}$$

EX 3

a) le dimensioni delle costanti si ottengo imponendo che tutte le componenti della forza siano nelle dimensioni idonee cioè $[N] = [MLT^{-2}]$. Quindi:

$$[\alpha]=\frac{[MLT^{-2}]}{[x^2]}=\frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]}=[ML^{-1}T^{-2}]$$
$$[\beta]=\frac{[MLT^{-2}]}{[yz]}=\frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]}=[ML^{-1}T^{-2}]$$

b) per verificare se il campo è conservativo calcolo il rotore della forza:

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \delta/\delta x & \delta/\delta y & \delta/\delta z\\ F_x & F_y & F_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \delta/\delta x & \delta/\delta y & \delta/\delta z\\ -3\alpha x^2+\beta yz & \beta xz & \beta xy\end{pmatrix}=$$
$$=\hat{i}\left(\frac{\partial(\beta xy)}{\partial y}-\frac{\partial(\beta xz)}{\partial z}\right)-\hat{j}\left(\frac{\partial(\beta xy)}{\partial x}-\frac{\partial(-3\alpha x^2+\beta yz)}{\partial z}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial(\beta xz)}{\partial x}-\frac{\partial(-3\alpha x^2+\beta yz)}{\partial y}\right)=$$
$$=\hat{i}\left(\beta x-\beta x\right)-\hat{j}\left(\beta y+0-\beta y\right)+\hat{k}(\beta z+0-\beta z)=\vec{0}$$

Il campo è conservativo e posso quindi calcolare l'energia potenziale:

$$V=-\int_{0,0,0}^{x,y,z}\vec{F}\,d\vec{s}=-\int_{0,0,0}^{x,0,0}F_x\,dx-\int_{x,0,0}^{x,y,0}F_y\,dy-\int_{x,y,0}^{x,y,z}F_z\,dz=-\int_{0,0,0}^{x,0,0}(-3\alpha x^2+\beta yz)dx-\int_{x,0,0}^{x,y,0}(\beta xz)dy-\int_{x,y,0}^{x,y,z}(\beta xy)dz==$$
$$=\left[3\alpha\frac{x^3}{3}-\beta xyz\right]_{000}^{x00}-\left[\beta xzy\right]_{x00}^{xy0}+\left[\beta xyz\right]_{000}^{x00}=\alpha x^3-\beta xyz$$

c) avendo trovato l'energia potenziale calcolare il lavoro diventa banale:

$$L_{A,B}=V_A-V_B=(\alpha x^3-\beta xyz)_{1,3,-1}-(\alpha x^3-\beta xyz)_{2,2,0}=[\alpha 1^3-\beta 1*3*(-1)]-[\alpha 2^2-\beta 2*2*0]=3\beta-7\alpha Joule$$

EX 4

a) Essendo il piano inclinato liscio, la velocità del punto prima dell'urto è pari alla velocità con cui arriva alla fine del piano inclinato che si può ricavare imponendo la conservazione dell'energia meccanica. In cima al piano inclinato il punto è fermo e possiede quindi solo energia potenziale gravitazionale; sul piano orizzontale invece il punto possiede solo energia cinetica perciò:

$$E_{in}^{mecc}=E_{fin}^{mecc}\Rightarrow mgh=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow v=\sqrt{2gh}=4,4m/s$$

b) la velocità del punto dopo l'urto e la velocità angolare della sbarra si trovano imponendo un sistema di due equazioni: la prima è la conservazione del momento angolare (la reazione vincolare che tiene vincolata la sbarra in O rappresenta una forza esterna quindi il sistema non è isolato e non si conserva la quantità di moto. Rispetto al polo O però il momento delle forze è nullo per cui si conserva il momento angolare) e la seconda è la conservazione dell'energia cinetica (l'urto è di tipo elastico). Il momento angolare viene calcolato rispetto al punto O attorno a cui ruota la sbarra.

$$\begin{cases}\vec{K}_{in}=\vec{K}_{fin}\\ E_{in}^{cin}=E_{fin}^{cin}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(-\frac{2L}{3}\hat{j}\right)\times(mv\hat{i})=I\vec{\omega}+\left(-\frac{2L}{3}\hat{j}\right)\times(mv'\hat{i})\\ \frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}I\omega^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{2L}{3}mv\hat{k}=I\omega\hat{k}+\frac{2L}{3}mv'\hat{k}\\ mv^2=mv'^2+I\omega^2\end{cases}$$

Il momento d'inerzia deve essere calcolato nel punto per cui passa l'asse di rotazione che non coincide con il centro di massa. Va quindi applicato il teorema di Huygens Steiner:

$$I=\frac{1}{12}ML^2+M\left(\frac{L}{2}-\frac{L}{3}\right)^2=\frac{1}{12}ML^2+M\left(\frac{L}{6}\right)^2=\frac{1}{12}ML^2+\frac{1}{36}ML^2=\frac{1}{9}ML^2=\frac{1}{9}*0,2*(0,3)^2=2*10^{-3}kg*m^2$$

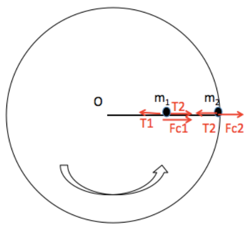
Sostituendo i valori numerici nel sistema ottengo due equazioni nelle due incognite richieste:

$$\begin{cases}2Lmv=3I\omega+2Lmv'\\ mv^2=mv'^2+I\omega^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2*0,3*0,1*4,4=3*2*10^{-3}\omega+2*0,3*0,1v'\\ 0,1*4,4^2=0,1v'^2+2*10^{-3}\omega^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4,4=0,1\omega+v'\\ 4,4^2=v'^2+2*10^{-2}\omega^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}v'=4,4-0,1\omega\\ 4,4^2=(4,4-0,1\omega)^2+2*10^{-2}\omega^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v'=4,4-0,1\omega\\ 4,4^2=4,4^2+0,1^2\omega^2-2*4,4*0,1\omega+2*10^{-2}\omega^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v'=4,4-0,1\omega\\ 3*10^{-2}\omega^2-0,88\omega=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}v'=4,4-0,1\omega\\ \omega(0,03\omega-0,88)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v'=4,4-0,1*29,3=1,5m/s\\ \omega_1=0,\omega_2=29,3rad/s\end{cases}$$

EX 5



In figura sono mostrate in rosso tutte le forze agenti sui due punti. Se prendiamo un sistema di riferimento solidale con le due masse che ruotano, compaiono anche le forze fittizie dovute alla non inerzialità del sistema. Perciò sulla massa m_1 agiscono: la tensione T_1, la forza centrifuga F_{c1}, la tensione T_2 nel piano orizzontale, la forza peso e la reazione vincolare nel piano verticale. Sul corpo m_2 agiscono; la tensione T_2 e la forza centrifuga F_{c2} nel piano orizzontale, la forza peso e la reazione vincolare nel piano verticale.

Il moto avviene solo nel piano orizzontale quindi consideriamo solo l'equazione della dinamica proiettata in direzione orizzontale. Nel sistema di riferimento solidale con le masse, i corpi sono in equilibrio per cui la somma delle forze agenti sul corpo deve essere nulla.

Per cui:

$$m_1\Rightarrow\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{F}_{C1}=0\Rightarrow -T_1+T_2+F_{C1}=0$$

$$m_2\Rightarrow\vec{T}_2+\vec{F}_{C2}=0\Rightarrow -T_2+F_{C2}=0$$

Ricordando che la forza centrifuga si esprime in funzione della distanza dall'asse di rotazione:

$$F_c=m\omega^2 d$$

Le equazioni diventano:

$$\begin{cases}-T_1+T_2+m_1\omega^2\frac{R}{2}=0\\ -T_2+m_2\omega^2R=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}T_2=m_2\omega^2R=1*10^2*10*10^{-2}=10N\\ T_1=T_2+m_1\omega^2\frac{R}{2}=10+2*10^2*5*10^{-2}=20N\end{cases}$$