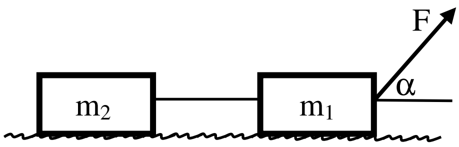
Corso di Laurea in Ingegneria Energetica

FISICA GENERALE T-A (9 Settembre 2011)

Prof. Roberto Spighi

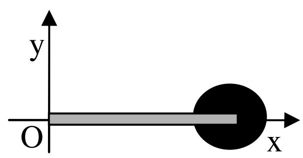
1) Usain Bolt, primatista mondiale, partecipa ad una gara di 100 metri. Partendo ovviamente da fermo, decide di accelerare per i primi 10 m con $a = 6\, m/s^2$ e poi di procedere con velocità costante. Determinare:
a) la massima velocità raggiunta;
b) il tempo finale realizzato.
Alla gara partecipa anche Oreste Pestalozzi della società “Corri & Spera” che non avendo molta potenza decide di accelerare con $a = 2\, m/s^2$ lungo tutto il percorso. Domanda:
c) chi vince tra Bolt e Pestalozzi?

2) Un sistema è composto da 2 corpi rispettivamente di massa $m_1 = 1\, kg$ ed $m_2 = 2\, kg$ che poggiano su di un piano orizzontale e sono uniti da un corda inestensibile e priva di massa (vedi figura). Il sistema è tirato da una forza $\vec{F} = 10\, N$ che forma un angolo $\alpha = 60^\circ$ rispetto all’orizzontale. Nell’ipotesi che il piano di appoggio sia liscio, determinare:



a) l’accelerazione del sistema;
b) la tensione della corda.
Nell’ipotesi che il piano di appoggio sia scabro con coefficiente di attito dinamico $\mu_D = 0.2$, determinare:
c) l’accelerazione del sistema;
d) la tensione della corda.

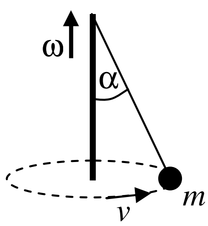
3) Un sistema è composto da una sbarra omogenea di lunghezza $l = 1\, m$, massa $m_S = 1\, kg$ e sezione trasversa trascurabile e da un disco di raggio $R = 0.2\, m$, massa $m_D = 1\, kg$ anch’esso omogeneo incollato nel suo punto centrale ad una estremità della sbarra. Il sistema può ruotare senza attrito su un piano verticale attorno ad un asse fisso passante per 0. Inizialmente il sistema è tenuto fermo in posizione orizzontale (vedi figura), poi è lasciato libero. Determinare, rispetto al punto O:



a) il vettore accelerazione angolare del sistema quando la sbarra ha effettuato una rotazione $\alpha = 60^\circ$;
b) il vettore momento angolare del sistema quando la sbarra ha effettuato una rotazione $\alpha = 60^\circ$;
c) il modulo del vettore velocità angolare quando il sistema ha effettuato una rotazione di $\alpha = 180^\circ$.
I momenti d’inerzia di un disco di raggio r e di una sbarra lunga d rispetto ai loro cm sono $\frac{mr^2}{2}$ e $\frac{md^2}{12}$

4) Dato il campo di forze $\vec{F}(x, y, z) = -2\alpha(2x^3 y^2 \hat{\imath} + x^4 y \hat{\jmath})$ determinare:
a) le dimensioni fisiche della costante α;
b) se il campo è conservativo e nel caso calcolarne l’energia potenziale in un punto P(x,y,z);
c) il lavoro compiuto dalla forza quando sposta il punto di applicazione da R(0,0,0) a S(2,2,2).

5) Una massa m è appesa ad una filo inestensibile, di lunghezza $l = 1\, m$ e di massa trascurabile. La massa descrive un moto circolare uniforme con velocità angolare $\omega = 2\pi\, rad/s$ (vedi figura). Determinare:



a) le forze fittizie che agiscono sulla massa m;
b) l’angolo α che il filo forma con la direzione verticale.

6) Ricavare i vettori posizione, velocità ed accelerazione in coordinate intrinseche.

Soluzioni compito:

Esercizio 1:

a-b)

I primi $10\,m$ della gara di Bolt sono un moto rettilineo uniformemente accelerato. Prendendo come direzione l'asse x, scriviamo le espressioni per l'accelerazione e la velocità (omettiamo i simboli di vettore):

$$\begin{cases} a = \dfrac{dv}{dt} \\ v = \dfrac{dx}{dt} \end{cases}$$ da cui sapendo che l'accelerazione è costante e che Bolt parte da fermo, si ottiene:

$$\begin{cases} v = at \\ x = \dfrac{1}{2}at^2 \end{cases}$$ dove x è lo spazio percorso e t è il tempo impegato per percorrere lo spazio suddetto.

Queste sono 2 equazioni in 2 incognite (t e v) che risolte danno:

$$\begin{cases} t = \sqrt{\dfrac{2x}{a}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 10}{6}} = 1.83\,s \\ v = a\sqrt{\dfrac{2x}{a}} = \sqrt{2ax} = 10.95\,m/s \end{cases}$$

dove t e v sono rispettivamente il tempo necessario per percorrere lo spazio $x = 10\,m$ e la velocità raggiunta dopo lo stesso spazio.

Per calcolare il tempo che Bolt impiega a percorrere i restanti $90\,m$ basta usare l'equazione per il moto rettilineo uniforme:

$$v = \frac{s}{t} \quad \rightarrow \quad t = \frac{s}{v} = \frac{90}{10.95} = 8.22\,s$$

che aggiunto al tempo impiegato per i primi $10\,m$ dà:

$$t_{tot} = 1.83 + 8.22 = 10.05\,s$$

La velocità massima raggiunta è quella già calcolata $v = 10.96\,m/s$ che è stata raggiunta dopo $10\,m$ e mantenuta fino al traguardo.

c)

Il moto di Oreste Pestalozzi è un moto uniformemente accelerato per tutti i $100\,m$ dunque utilizzando le stesse equazioni di prima:

$$\begin{cases} v = at \\ x = \dfrac{1}{2}at^2 \end{cases}$$ che risolte nelle incognite t e v danno:

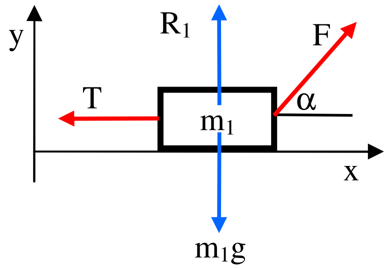
$$\begin{cases} v = a\sqrt{\dfrac{2x}{a}} = \sqrt{2ax} = 20.0\,m/s \\ t = \sqrt{\dfrac{2x}{a}} = \sqrt{\dfrac{200}{2}} = 10.0\,s \end{cases}$$

Dunque per pochi centesimi **vince il grande Pestalozzi** (in realtà un uomo non può fisicamente raggiungere la velocità $v = 20\,m/s$ che corrisponde a $v = 72\,km/h$).

Esercizio 2

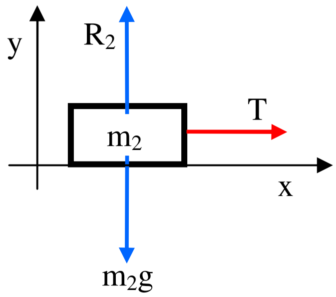
a e b)

Per risolvere il problema è necessario scrivere la $\vec{F} = m\vec{a}$ per entrambi i corpi del sistema (la corda non deve essere considerata in quanto ha massa nulla). Scegliamo come asse x la direzione orizzontale nel verso del moto e come y quella verticale verso l'alto.



Corpo m_1 → $\begin{cases} x \\ y \end{cases}$ → $\begin{cases} F\cos\alpha - T = m_1 a \\ R_1 + Fsen\alpha - m_1 g = 0 \end{cases}$

dove R_1, T e a sono rispettivamente la reazione vincolare sul corpo di massa m_1, la tensione della corda e l'accelerazione del corpo di massa m_1 (che coincide con l'accelerazione del sistema in quanto la fune è inestensibile).



Corpo m_2 → $\begin{cases} x \\ y \end{cases}$ → $\begin{cases} T = m_2 a \\ R_2 - m_2 g = 0 \end{cases}$

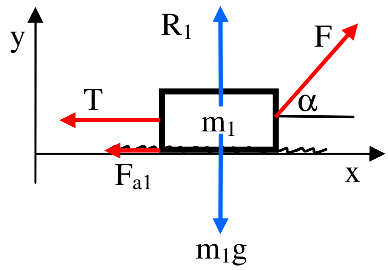
dove R_2, T e a sono rispettivamente la reazione vincolare sul corpo di massa m_2, la tensione della corda e l'accelerazione del corpo di massa m_2. Da notare, come già espresso, che T ed a sono gli stessi per entrambi i corpi.. In questo caso, in cui l'attrito non è presente, per ottenere l'accelerazione del sistema e la tensione del filo è sufficiente utilizzare le espressioni della $\vec{F} = m\vec{a}$ lungo l'asse x per i 2 corpi:

$\begin{cases} F\cos\alpha - T = m_1 a \\ T = m_2 a \end{cases}$ queste sono 2 equazioni in 2 incognite (T ed a) che risolte danno:

$$\begin{cases} a = \dfrac{F\cos\alpha}{m_1 + m_2} = \dfrac{5}{3} = 1.67\ m/s^2 \\ T = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} F\cos\alpha = \dfrac{10}{3} = 3.34\ N \end{cases}$$

c) d)

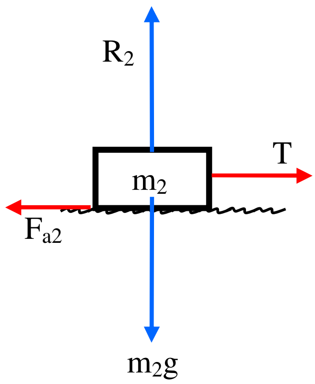
Il problema deve essere impostato come nel caso precedente, tenendo però conto anche della forza di attrito:



Corpo m_1 → $\begin{cases} x \\ y \end{cases}$ → $\begin{cases} F\cos\alpha - F_{a1} - T = m_1 a \\ R_1 + Fsen\alpha - m_1 g = 0 \end{cases}$

dove F_{a1} e R_1 sono rispettivamente la forza di attrito e la reazione vincolare sul corpo di massa m_1. Esplicitiamo la forza di attrito:

$\begin{cases} F\cos\alpha - \mu_D R_1 - T = m_1 a \\ R_1 = m_1 g - Fsen\alpha \end{cases}$ → $\begin{cases} F\cos\alpha - \mu_D (m_1 g - Fsen\alpha) - T = m_1 a \\ R_1 = m_1 g - Fsen\alpha \end{cases}$



Corpo m_2 → $\begin{cases} x \\ y \end{cases}$ → $\begin{cases} T - F_{a2} = m_2 a \\ R_2 - m_2 g = 0 \end{cases}$

dove F_{a2} e R_2 sono rispettivamente la forza di attrito e la reazione vincolare sul corpo di massa m_2. Esplicitiamo la forza di attrito:

$$\begin{cases} T - \mu_D R_2 = m_2 a \\ R_2 = m_2 g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T - \mu_D m_2 g = m_2 a \\ R_2 = m_2 g \end{cases}$$

Da sottolineare che, in presenza di attrito, per ottenere l'accelerazione e la tensione della corda è necessario considerare anche l'espressione della $\vec{F} = m\vec{a}$ lungo l'asse y (non era stato così nel caso precedente). A questo punto, avendo già usato le informazioni lungo l'asse y, consideriamo la $\vec{F} = m\vec{a}$ solo lungo l'asse x per entrambi i corpi:

$$\begin{cases} F\cos\alpha - \mu_D (m_1 g - F sen\alpha) - T = m_1 a \\ T - \mu_D m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

queste sono 2 equazioni in 2 incognite (T ed a) che risolte danno:

$$\begin{cases} a = \dfrac{F(\cos\alpha + \mu_D \sin\alpha) - \mu_D (m_1 + m_2) g}{m_1 + m_2} = 0.28\ m/s^2 \\ T = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} F(\cos\alpha + \mu_D \sin\alpha) = 4.49\ N \end{cases}$$

Osservazione: se la forza che tira il sistema fosse stata orizzontale ($\alpha = 0$), le soluzione al caso senza e con attrito sarebbero state:

senza attrito

$$\begin{cases} a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} \\ T = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} F \end{cases}$$

con attrito

$$\begin{cases} a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} - \dfrac{\mu_D (m_1 + m_2) g}{m_1 + m_2} \\ T = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} F \end{cases}$$

Dove si evince che la tensione della corda è la stessa in entrambi i casi, mentre l'accelerazione è ovviamente diminuita.

Esercizio 3

Per la soluzione di tutti i quesiti è necessario calcolare il momento d'inerzia del sistema I_T rispetto all'asse di rotazione passante per O: questo è dato dalla somma del momento di inerzia della sbarra I_S sommato a quello del disco I_D:

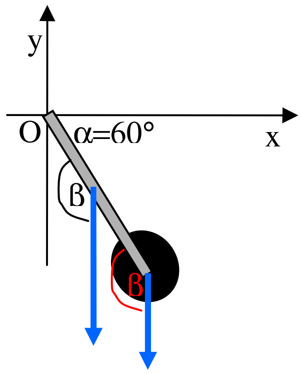
$I_T = I_S + I_D$ dove

$I_S = \dfrac{m_S l^2}{12} + m_S \left(\dfrac{l}{2}\right)^2 = \dfrac{m_S l^2}{3}$ ottenuto usando il teorema di Huygens-Steiner

$I_D = m_D \frac{R^2}{2} + m_D l^2$ ottenuto usando il teorema di Huygens-Steiner

Sommandoi due termini si ottiene: $I_T = \frac{m_S l^2}{3} + m_D \frac{R^2}{2} + m_D l^2 = \frac{1}{3} + \frac{0.2^2}{2} + 1 = 1.35\, kg\, m^2$

a)



L'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$ è determinabile dalla seconda equazione cardinale della meccanica: $\vec{M} = I_T \vec{\alpha}$ .Sul sistema agiscono 3 forze: le forza peso della sbarra applicata nel suo centro di massa (punto di mezzo), la forza peso del disco anch'essa applicata nel suo centro di massa e la reazione del vincolo applicata in O (vedi figura). Dovendo calcolare il momento della forza $\vec{M}$ rispetto al punto O, intervengono solo le forze peso e non la reazione vincolare (che è applicata in O), come mostrato in figura.

Calcoliamo il momento della forza dei vari corpi del sistema rispetto al punto O e scegliendo come assi x, y, z quelli in figura con l'asse z uscente dal foglio.:

Sbarra → $\vec{M}_S = \vec{r} \wedge \vec{F} = -\frac{l}{2} m_S g\, sen\beta \hat{k} = -\frac{l}{2} m_S g\, sen\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \hat{k} = -\frac{l}{2} m_S g \cos\alpha\, \hat{k}$

Disco → $\vec{M}_D = \vec{r} \wedge \vec{F} = -l m_D g\, sen\beta\, \hat{k} = -l m_D g\, sen\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \hat{k} = -l m_D g \cos\alpha\, \hat{k}$

La risultante del momento della forze è:

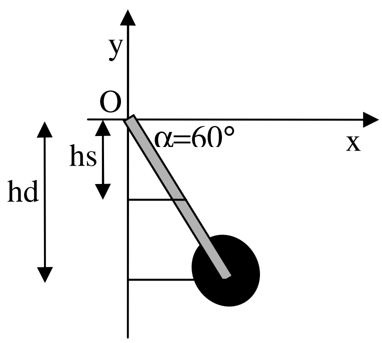
$$\vec{M}_T = \vec{M}_S + \vec{M}_D = -\frac{l}{2} m_S g \cos\alpha\, \hat{k} - l m_D g \cos\alpha\, \hat{k} = -l\left(\frac{m_S}{2} + m_D\right) g \cos\alpha\, \hat{k} = -7.35 \hat{k}\ Nm\ .$$

Dunque $$\vec{\alpha} = \frac{\vec{M}_T}{I_T} = \frac{-l\left(\frac{m_S}{2} + m_D\right) g \cos\alpha\, \hat{k}}{\frac{m_S l^2}{3} + m_D \frac{R^2}{2} + m_D l^2} = \frac{-7.35\, \hat{k}}{1.35} = -5.44 \hat{k}\, rad/s^2$$

b)

Il vettore momento angolare $\vec{K}$ di un corpo rigido (quale è il nostro sistema) lo si ottiene da:

$\vec{K} = I_T \vec{\omega}$



dunque è necessario ricavare la velocità angolare $\vec{\omega}$ quando il sistema ha ruotato di $\alpha = 60^\circ$

Le forze che agiscono sul sistema sono o forze che non compiono lavoro (la forza del vincolo in O) o forze conservative (le 2 forze peso) e dunque possiamo applicare la conservazione dell'energia meccanica prendendo come istante iniziale quello in cui la sbarra è in posizione orizzontale e quello finale quando ha ruotato di $\alpha = 60^\circ$. Scegliendo lo stesso sistema di riferimento mostrato nella precedente figura, otteniamo

$E_{ini} = E_{fin}$ → $T_{ini} + V_{ini} = T_{fin} + V_{fin}$ In particolare:

$E_{ini} = 0$ essendo nulla sia l'energia cinetica poiché il sistema è fermo, sia l'energia potenziale perchè il sistema giace sull'asse x del nostro sistema di riferimento.

Al contrario quando il sistema è ruotato di $\alpha = 60°$ possiede sia energia cinetica che potenziale

$$E_{fin} = \frac{1}{2} I_T \omega^2 - m_S g h_S - m_D g h_d = \frac{1}{2} I_T \omega^2 - m_S g \frac{l}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - m_D g l \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \rightarrow$$

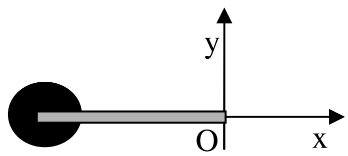
$$E_{fin} = \frac{1}{2} I_T \omega^2 - m_S g \frac{l}{2} \sin\alpha - m_D g l \sin\alpha$$

Dunque

$$E_{fin} = E_{ini} = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2\left(\frac{m_S}{2} + m_D\right) g l \sin\alpha}{I_T}} = \sqrt{\frac{2\left(\frac{1}{2} + 1\right) g \frac{\sqrt{3}}{2}}{1.35}} = 4.34\, rad/s$$

c)



La velocità angolare ω dopo una rotazione di $\alpha = 180°$ (vedi figura) può essere ottenuta esattamente come nel caso precedente attraverso la conservazione dell'energia; prendiamo come istante iniziale quello in cui il sistema non ha ancora iniziato a ruotare $\alpha = 0°$ e come istante finale quello dopo una rotazione di $\alpha = 180°$;

$E_{ini} = E_{fin}$ → $T_{ini} + V_{ini} = T_{fin} + V_{fin}$ In particolare:

$E_{ini} = 0$ (vedi risposta b) essendo nulla sia l'energia cinetica poiché il sistema è fermo, sia l'energia potenziale perchè il sistema giace sull'asse x del nostro sistema di riferimento.

$E_{fin} = \frac{1}{2} I_T \omega^2$ essendo nulla l'energia potenziale perchè il sistema giace sull'asse x del nostro sistema di riferimento. Dunque

$$\frac{1}{2} I_T \omega^2 = 0 \rightarrow \omega = 0$$

Il sistema, dopo aver compiuto una rotazione di $\alpha = 180°$ è fermo.

Esercizio 4

La costante α ha dimensioni fisiche fondamentali $[ML^{-4}T^{-2}]$ e unità di misura N/m^5 oppure Kg/m^4s^2.

Il rotore del campo è nullo, dunque il campo è conservativo. Calcolando il lavoro su un cammino rettilineo a tratti tra l'origine O(0,0,0) ed un punto generico P(*x,y,z*) si ottiene l'energia potenziale $V = \alpha x^4 y^2$.

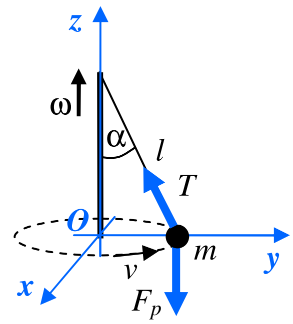
Il lavoro tra i punti R(0,0,0) e S(2,2,2) si ottiene dalla relazione:

$$L_{RS} = V(R) - V(S) = -64\alpha$$

Esercizio 5

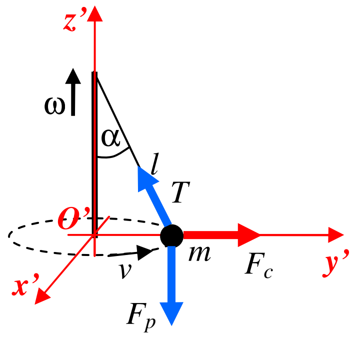
a)

Vediamo tutte le forze (reali e fittizie) che agiscono sulla nostra massa m.



Forze reali. Per determinare le forze reali che agiscono sulla massa m (denotate dal colore blu in figura), prendiamo un sistema di riferimento fisso S (dunque inerziale e anch'esso in blu) con gli assi x, y e z fissi e diretti come in figura. Rispetto a S le uniche forze agenti sulla massa m sono la forza peso $\vec{F}_p$ e la tensione del filo $\vec{T}$ dirette come in figura, dunque:

$$\vec{F}_{reali} = \vec{F}_p + \vec{T} = m\vec{g} + \vec{T}$$



Forze fittizie. Per determinare le forze fittizie (denotate dal colore rosso in figura) che agiscono sulla massa m prendiamo un sistema di riferimento rotante S' (dunque non inerziale e anch'esso in rosso) con l'asse z' diretta lungo la verticale e l'asse y' che segue la massa (vedi figura). Rispetto al sistema di riferimento S', la risultante delle forze $\vec{F}'$ è data da:

$$\vec{F}' = \vec{F}_{reali} + \vec{F}_{fittizie} = \vec{F}_{reali} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' - ma_{oo'}$$

dove $\vec{F}_{reali}$ sono le forze reali rispetto al sistema S valutate precedentemente. Dei 4 termini delle forze fittizie solo quello centrifugo è diverso da zero, in quanto:

$-2m\vec{\omega}\times\vec{v}' = 0$ (forza di Coriolis) nullo poiché $\vec{v}'$ è nullo nel sistema di riferimento S';

$-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = m\omega^2 R$ (forza centrifuga $\vec{F}_c$) con R distanza tra massa m e origine O' → $R = l\sin\alpha$

$-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' = 0$ nullo in quanto $\vec{\omega}$ è costante

$-ma_{oo'} = 0$ nullo in quanto le origini dei due sistemi di riferimento S ed S' coincidono.

Pertanto $\vec{F}_{fittizie} = m\omega^2 R\,\hat{j}' = m\omega^2 l\sin\alpha\,\hat{j}'$

b)

Nel sistema di riferimento S', le forze che agiscono sulla massa m devono avere risultante nulla poiché in questo sistema di riferimento la massa m è ferma , dunque

$$\vec{F}' = \vec{F}_{reali} + \vec{F}_{fittizie} = m\vec{g} + \vec{T} + m\omega^2 l \sin\alpha \, \hat{j}' = 0$$

Scomponiamo le forze lungo gli assi y' e z' (non c'è componente lungo x')

$$\begin{cases} F_{fittizia} - T\sin\alpha = 0 \\ T\cos\alpha - mg = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m\omega^2 l \sin\alpha - T\sin\alpha = 0 \\ T\cos\alpha = mg \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m\omega^2 l - T = 0 \\ T\cos\alpha = mg \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T = m\omega^2 l \\ \cos\alpha = \dfrac{mg}{T} = \dfrac{mg}{m\omega^2 l} = \dfrac{g}{\omega^2 l} \end{cases}$$

Dunque $\alpha = a\cos\left(\dfrac{g}{\omega^2 l}\right)$ che in condizioni ideali non dipende dalla massa dell'oggetto ma solo dalla velocità angolare ω e dalla lunghezza del filo l. Inserendo i numeri del testo si ottiene:

$$\alpha = a\cos\left(\frac{9.8}{(2\pi)^2}\right) = 75.6^\circ$$